El Incremento Finito de una Sumación Finita

Por: Gabriel Poveda Ramos.*

0. En la teoría de las ecuaciones en diferencias finitas, en análisis numérico, y en la teoría de optimización de sistemas discretos, se ocurre en ocasiones la necesidad de estudiar expresiones de la forma

$$(1) \qquad S_n = \sum_{r = a(n)}^{r = b(n)} u(n,r), \text{ con } r = (a, a+1, \ldots, b-1, b); \quad b(n) > a(n)$$

en donde el término genérico u (n, r) de la sumación depende de un parámetro n perteneciente a los núeros naturales; y en donde ambos límites de la sumación son números naturales que dependen del mismo parámetro n[1]. En particular, se presenta, a veces la necesidad de calcular explícitamente la primera diferencia finita (indicada en el operador Δ_n) de la expresión (1) cuando n aumenta una unidad, es decir,

$$\Delta_n \ S_n = S_{n+1} - S_n .$$

Se trata de una situación análoga a la que se presenta cuando hay que calcular la derivada de un integral definio, cuando los límites y la función del integrando dependen de un parámetro, es decir, cuando se calcula

$$(2) \qquad \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t).\, dx$$

Es bien sabido que la derivada indicada en (2) puede calcularse recurriendo a la identidad conocida con el nombre de fórmula de Leibniz:

$$(3) \qquad \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t).\, dx$$

$$= f(b) - f(a) + \int_a^b \frac{d}{dt} f(x, t)\, dt$$

En cambio, la literatura (mas bien escasa por cierto), que se ocupa de la teoría de sumaciones no habla de ninguna fórmula para calcular

$$\Delta_n \ S_n$$

que sea la análoga de la de Leibniz. El propósito de esta nota es deducir y presentar esta fórmula, que aunque es muy elemental, no aparece mencionada ni en los buenos tratados de Cálculo en diferencias Finitas (Véase bibliografía).

1. Para n + 1, la expresión (1) es

$$S_{n+1} = \sum_{r = a(n+1)}^{r = b(n+1)} U(n+1, r)$$

y su diferencia con (1) es

$$(4) \qquad S_n = \sum_{a(n+1)}^{b(n+1)} U(n+1, r) - \sum_{a(n)}^{b(n)} U(n, r)$$

Admitiendo que a (n), b (n) son funciones monótonas estrictamente crecientes de n, los valores de a (n), a (n + 1), b (n), b (n + 1) están dispuestos como lo insinúa el dibujo contiguo:

en donde se ha puesto a (n + 1) = E a = a´, b (n + 1) = Eb = b´, y siendo E el conocido operador de desplazamiento.

* Ingeniero Químico y Electricista - Profesor Universitario - Director del Centro de Investigaciones U. de M.

(1) Es decir, son funciones discretas de variable discreta, cuyo dominio es N y cuyo codominio está en N.

Es evidente, así que la expresión (4) puede escribirse

$$\Delta S_n = \sum_{r=a'}^{r=b} U(n+1, r) + \sum_{r=b+1}^{r=b'} U(n+1, r)$$

$$- \sum_{r=a}^{a'-1} U(n, r) - \sum_{r=a'}^{r=b} U(n, r)$$

lo cual puede escribirse también

$$(5)\ \Delta S_n = \sum_{r=b(n)+1}^{r=b(n+1)} U(n+1, r) - \sum_{r=s(n)}^{r-a(n+1)-1} U(n, r) + \sum_{r=a(n+1)}^{r=b(n)} \Delta_n U(n, r)$$

Esta es la fórmula que tiene un carácter análogo a la de Leibniz, mencionada en (3), y pudiera llamarse fórmula de Leibniz-Boole.

Este resultado es completamente general sólo a condición de que para todo n, sea b (n) > a (n). Y es completamente inequívoco si a (n), b (n), son monotónica y estrictamente crecientes para todo n. En caso de que alguna de ellas no lo fuera, la expresión seguirá siendo válida si se entendiera que el recorrido de las sumaciones es

r = b(n)+ 1, b(n)+ 2,..., b(n+1)-1, b(n+1), ordenadamente,

y no r = b (n) + 1,..., mín { b (n) + 2,..., b(n + 1) }

y así con las otras dos sumaciones indicadas en (5).

2. Un caso particular de interés en las aplicaciones es aquel en el cual el límite inferior al de la sumación (1) es fijo. Entonces se tiene

$$(6)\ \Delta_n \sum_{r=a}^{b(n)} U(n, r) = \sum_{r=b(n)+1}^{r=b(n+1)} U(n+1, r) + \sum_{r=a}^{b(n)} \Delta_n U(n, r)$$

Por ejemplo, si b (n) = n, es

$$(7)\ \Delta_n \sum_{r=0}^{n} U(n, r) = U(n+1, n+1) + \sum_{r=o}^{n} \Delta_n U(n, r)$$

Un ejemplo del uso de esta última fórmula, se da cuando se trata de situar un mínimo local para expresiones de la forma.

$$(8)\ T_n = \sum_{r=o}^{n} V(n-r)\, W(r) \quad , \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \ldots$$

llamada "convolución" de U y de V (e indicada U(n)* V (n)). Este problema se presenta con frecuencia en la teoría matemática de inventarios y en el estudio de modelos de renovación y reposición, de la evolución dinámica de poblaciones, de proceso de nacimiento y muerte, y de fenómenos "hereditarios" en sistemas con "memoria".

Condiciones necesarias y suficientes para un primer mínimo local de T_n son

$$\Delta T_{n-1} < 0 \ , \ \Delta T_n \geqslant 0$$

Según la fórmula (7), estas condiciones son

$$(8.1)\quad V(0)\, W(n+1) + \sum_{o}^{n} W(r)\, \Delta_n V(n-r) \geqslant 0$$

$$(8.2)\quad V(0)\, W(n) + \sum_{o}^{n-1} W(r)\, \Delta_n V(n-r-1) < 0$$

y la solución de estas inecuaciones (supuesto que exista) identifica el mínimo buscado.

3. Cabe referirse también por separado al problema del incremento finito de una sumación con límite superior fijo b, incremento que será

$$(9)\ \Delta_n \sum_{r=a(n)}^{r=b} U(n, r) = \sum_{r=a(n+1)}^{b} \Delta_n U(n+1, r) - \sum_{r=a(n)}^{a(n+1)-1} U(n, r), \text{ con b } a(n)$$

Y si, por ejemplo, a´(n) = n

$$(10)\quad \Delta_n \sum_{r=n}^{b} U(n, r) = \sum_{r=n+1}^{r=b} \Delta_n U(n+1, r) -$$

U (n, n), siendo b n + 1.

De este modo podría simplificarse más con otros casos especiales, pero que se dejan al lector interesado.

BIBLIOGRAFIA

1. Batchelder, Paul M. **An Introduction to Linear Difference Equations.** New York, Dover Publications, 1967. 209 p.

2. Frish, Ragnar.- **Maxima et Minima.** Dunod, París, 1960. 178 p.

3. Hadley, George.- **Analysis of Inventory Systems,** por G. Hadley y T.M. Whitin. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1963.

4. Jordan, Charles. **Calculus of Finite Differences.** New York, Chalsea, C 1965. 654 p.

5. Kauffmann, Arnold. **Methodes et Modeles de l'Investigation Operationnelle.** Dunod, París, 1960. 265 p.

6. Levy, H. **Finite Difference Equations,** by H. Levy and F. Lessman. New York, Macmillan, 1961. 278 p.

7. Saaty, Thomas L.- **Mathematical Methods of Operations Research.** Mac Graw-Hill, New York, 1959. 421 p.