# LA GEOMETRÍA COMPLEJA SINTÉTICA EN LA OBRA TEMPRANA DE JULIO REY PASTOR

Por

**Luis Español González**[1]

## Resumen

**González, L. E.:** La geometría compleja sintética en la obra temprana de Julio Rey Pastor. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **32**(124): 381-402, 2008. ISSN 0370-3908.

Se describe en este artículo el modo en que la matemática de los elementos imaginarios, analíticos y geométricos, centraron los primeros objetivos de investigación del matemático español **Rey Pastor**. Se presta especial atención a su trabajo realizado en Gotinga el curso 1913-14, recogido en su libro *Fundamentos de la geometría proyectiva superior* (1916). Añadiendo axiomas al sistema de **Pasch**, desarrolló la geometría proyectiva compleja hasta demostrar el teorema fundamental de la geometría algebraica y dar una definición sintética de curva analítica. La obra de **Rey Pastor** en este campo geométrico tuvo escasa proyección en una época dominada ya por el método analítico.

**Palabras clave:** Historia de las matemáticas, Geometría proyectiva sintética, Geometría compleja, curva analítica, España, siglo XX, Julio Rey Pastor.

## Abstract

The way how mathematics of analytic and geometric imaginary elements focused the early research goals of the Spanish mathematician **Rey Pastor** is described in this article. Special attention is payed to his work at Gotinga during the academic year 1913-14, collect-ed in his book *Fundamentos de la geometría proyectiva superior* (1916). Adding axioms to **Pasch**'s system, he developed synthetic complex geometry as late as to prove the fundamental theorem of algebraic geometry, and to give a synthetic definition of analytic curve. **Rey Pastor**'s work in this geometric field had a weak proyection, in a period in which the analytic method was dominant.

1 Universidad de la Rioja, España. Correo electrónico: luis.espanol@unirioja.es

**Key words**: History of mathematics, Synthetic projective geometry, Complex geometry, Analytic curve, Spain, 20th century, Julio Rey Pastor.

## Introducción

En torno a 1900, debido sobre todo a la evolución de la matemática alemana, se produjo un cambio profundo en los métodos y problemas propios de la investigación en matemáticas. Desde un país como España, en el que no estaban implantadas las innovaciones de la segunda mitad del siglo XIX que anunciaron la nueva mentalidad, este cambio coexistió con los esfuerzos que pretendían la puesta al día de la matemática nacional.

A partir de 1907, la Junta para Ampliación de Estudios (en lo sucesivo JAE) protagonizó una acción institucional muy significativa para la modernización científica del país, fomentando los estudios de posgrado en los centros europeos más avanzados. Uno de sus pensionados fue el matemático **Rey Pastor**[2], que se había formado en el marco del plan de estudios de 1900, dominado, en detrimento del análisis, por la geometría y, dentro de ella, por el método sintético. El inspirador de este plan fue **Torroja**[3], veterano catedrático de la Universidad de Madrid, monopolizadora entonces del doctorado. Allí acudió **Rey Pastor** una vez terminada su licenciatura en Zaragoza (1908), publicando en 1910 de su tesis doctoral de geometría, realizada en la estela sintética de **Torroja**, aunque con cierta independencia de criterio. Inició así su carrera de investigador matemático con una orientación que ya estaba obsoleta, al margen de los nuevos desarrollos dominantes; no obstante, en sus trabajos sintéticos dejó la huella de su poderosa capacidad matemática.

La formación de **Rey Pastor** había alcanzado cotas de modernidad en Zaragoza bajo el influjo de otro catedrático veterano, **García de Galdeano**[4], que realizó un enorme esfuerzo individual de actualización al margen del plan de estudios oficial, siendo el matemático español de esa época más en contacto con la vanguardia europea. Esta circunstancia no impidió que el joven **Rey Pastor** recibiera un fuerte impacto al conocer en directo la matemática en su proceso de creación, gracias a las pensiones que recibió de la JAE para perfeccionar en Alemania su formación en análisis matemático y en geometría superior, lo que hizo a lo largo de los cursos 1911-12 (Berlín) y 1913-14 (Gotinga), sin continuidad después de la Primera Guerra Mundial.

Al incorporarse a la investigación puntera **Rey Pastor** se vio inmerso en una contradicción entre la atracción del análisis matemático y la necesidad de sacar partido de su formación geométrica sintética; entre su experiencia geométrica doctoral y la preparación de oposiciones a la cátedra de Análisis matemático, que fue la primera oportunidad que se le presentó para resolver su porvenir profesional. En el centro de esta contradicción se situaron los imaginarios. Por una parte, el análisis complejo era desde **Riemann** y **Weierstrass** el gran protagonista de la teoría de funciones; por otra, la geometría sintética no quería perder la pista del análisis para avanzar en el camino de geometría pura iniciado por **Staudt**. Así, en su primera década profesional, la segunda del siglo, el trabajo de investigación de **Rey Pastor** se refiere a aspectos diversos, analíticos y sintéticos, de la matemática de los imaginarios. Del lado geométrico, su preocupación básica está en la introducción de los métodos propios del análisis en la geometría sintética y en avanzar en este campo más allá de la parte elemental lineal y cuadrática, hacia las figuras de orden superior.

En este contexto se origina su libro *Fundamentos de la geometría proyectiva superior* [53] (en los sucesivo *Fundamentos*), de enfoque sintético, cuya tercera y última parte, dedicada a la geometría proyectiva compleja, que termina con el concepto de curva analítica, será explicada en la segunda parte de este artículo. Antes, en la primera parte de este trabajo, se dará una visión general del grado de implantación de los imaginarios analíticos y sintéticos entre los profesores de **Rey Pastor** y de las aportaciones originales de éste al tema en su década profesional española, hasta a su incorporación a la Universidad de Buenos Aires en 1921. Ocuparán la tercera parte algunos datos sobre la breve vida que tuvo esta línea de investigación iniciada por **Rey Pastor**, con

[2]**Julio Rey Pastor** (1888-1962). La biografía de este matemático español y argentino puede verse en [52, 40]. En [23] se relatan sus primeros años plenamente españoles, hasta 1920, la época que corresponde a este artículo. En las obras citadas se mencionan otras referencias biográficas.

[3]**Eduardo Torroja** (1847-1918). Sobre **Torroja** y su influencia en la geometría española véase [43] y también [32].

[4]**Zoel García de Galdeano** (1846-1924), catedrático en Zaragoza, primero de geometría analítica y luego de cálculo infinitesimal. Ha sido biografiado [31] por **M. Hormigón**.

apenas algunos desarrollos epígonos de sus *Fundamentos*, y ciertas reflexiones sobre la modernidad de estos desarrollos en relación con la evolución de la geometría compleja en el marco del paradigma dominante en la matemática internacional, que estará representado por ejemplos coetáneos que también bebieron en las fuentes de Berlín y Gotinga.

Tiempo atrás, allá por 1994, preparé un borrador que puede considerarse antecedente parcial de este trabajo, con una ayuda del Instituto de Estudios Riojanos (IER)[5], y se lo di a leer a **Mariano Hormigón**, quien me pidió que lo publicara en *Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, de la que era director. Pero nunca hice los arreglos pertinentes para pasar de un borrador a un artículo acabado, otras tareas más urgentes lo impidieron. En el IER quedó una noticia parcial del trabajo [17], a modo de justificante de la ayuda recibida, y en un libro homenaje a miembros del IER fallecidos [21] publiqué una colaboración deudora de aquel borrador; pero ninguna de estas breves referencias afectan al carácter inédito del trabajo que ahora presento. La década larga transcurrida no le ha restado interés, pues nada se ha publicado entretanto específicamente dedicado a analizar la relación de **Julio Rey Pastor**, un matemático complejo, con la matemática de los imaginarios, en versión analítica y sintética, en la época temprana de su producción científica.

**In memoriam.** Dedico este trabajo a la memoria de **Mariano Hormigón Blázquez**, maestro de la historia de la ciencia e impulsor de la disciplina en España[6]. Mi trabajo en este campo se debe en buena medida a su insistencia.

## 1. Rey Pastor y la matemática de los imaginarios

A partir de **Argand**, los números complejos se convirtieron en tema de estudio para los matemáticos. Por una parte **Cauchy** inauguró la teoría de las funciones de variable compleja, mientras que **Gauss** y sus discípulos algebristas operaban con sistemas de números ampliados con la unidad imaginaria. Por otra, después de las intuiciones de **Poncelet** y **Chasles**, **Staudt** introduce las involuciones elípticas orientadas como elementos geométricos correlativos a los números imaginarios.

No es exagerado decir que los imaginarios caracterizan la matemática del siglo XIX, especialmente en su segunda mitad. **Pierpont** lo expresó así en 1904 [50]:

> *"Sin duda uno de los hechos más característicos de las matemáticas en el último siglo es el uso sistemático y universal de la variable compleja ... ¿es probable que Poncelet, Steiner, Chasles, y von Staudt hubieran desarrollado la geometría sintética con tal elegancia y perfección sin su poderoso estímulo?"*

El desarrollo analítico ha ido por delante y la geometría pura se ha esforzado en emular por vía sintética sus resultados, intentando llenar de significado geométrico el espacio ocupado en las demostraciones por los cálculos algebraicos. El rigor se implantó en el análisis, pero la geometría sintética permaneció intuitiva; llegó a ser rigurosa la parte lineal y cuadrática, pero la geometría de orden superior necesitaba recurrir al álgebra y al análisis en sus fundamentos.

Esta primera parte se divide en dos apartados, dedicado el primero a la formación que **Rey Pastor** pudo alcanzar en ambos campos del imaginarismo, y el segundo a su despegue como investigador entre los años 1910 y 1920, en el que jugó un papel nuclear el imaginarismo.

**1.1. Formación universitaria.** **Rey Pastor** estudió en Zaragoza según el plan de 1900, que planteaba una licenciatura de cuatro años, dos primeros comunes a otras especialidades científicas, impartidos por ello en todas la Facultades de Ciencias del país y otros dos más específicos que sólo se cursaban en Madrid, Barcelona y Zaragoza. Los dos primeros cursos incluían las asignaturas Análisis matemático 1º y 2º, Geometría métrica y Geometría analítica[7]. En las dos primeras, que incluían los temas básicos de álgebra clásica, se aprendían los números complejos y sus operaciones, y tal vez alguna idea sobre continuidad de los polinomios para explicar el teorema fundamental del álgebra. La geometría métrica era sintética, con un contenido euclidiano ampliado con elementos de proyectiva, y en el curso de geometría

[5]Instituto, dependiente del Gobierno de La Rioja, que ha apoyado constantemente mis investigaciones, ya extensas, sobre la vida y la obra del riojano **Julio Rey Pastor**, nacido en Logroño, la capital riojana. Véase [14, 15, 18].

[6]Para conocer la figura de **Mariano Hormigón** (1946-2004) véase la breve nota necrológica [22] y el libro homenaje [71]. A él se debe la terminología sobre paradigmas matemáticos usada en este artículo, véase [30].

[7]Además de Química general y Física general.

analítica podían estudiarse los elementos complejos del plano y el espacio.

Con este bagaje se estudiaba en 3º Cálculo infinitesimal y Geometría de la posición (proyectiva sintética), para terminar en 4º con dos asignaturas aplicadas, Mecánica racional y Geometría descriptiva[8]. La naturaleza aplicada del año final de la carrera indica su adscripción al paradigma lagrangiano que se extinguía, en el que primaba la aplicabilidad de la matemática. En cálculo y mecánica no se trataba la variable compleja, que quedaba ausente del plan de estudios, al igual que la geometría diferencial, vista sólo como breve aplicación del cálculo. La geometría de este segundo periodo era toda ella sintética, debido a la influencia de **Torroja**, el inspirador del plan de estudios, conocido como "el plan de las geometrías".

Tenemos que considerar también los cursos de doctorado, un año adicional que sólo se impartía en Madrid, con tres asignaturas: Curso de Análisis superior, Estudios superiores de Geometría y Astronomía del Sistema Planetario. En análisis estaba a cargo de **Octavio de Toledo**[9] y la geometría era de nuevo sintética, impartida por **Torroja**.

Veamos la formación que **Rey Pastor** obtuvo a través de este programa escolar y de la iniciativas adicionales que pudo tomar como estudiante muy aventajado que fue.

**a) Geometría compleja.** Cuando **Rey Pastor** afirmó que en 1890 la geometría española estaba en **Staudt** y que allí seguía veinticinco años después, se refería sin duda al libro de **Torroja** *Geometría de la posición* [67]. El autor sigue la línea trazada por **Reye** para la exposición didáctica de la obra staudiana real, pero mejora ampliamente al alemán en el tratamiento de los elementos imaginarios, como menciona **Rey Pastor** en una nota bibliográfica incluida en su libro *Fundamentos*:

> *"El único tratado de nosotros conocido donde se expone completamente la teoría de Staudt, incluso la proyectividad compleja, es el de Torroja".* [*F.* 340][10]

Unos años después publicó *Teoría general de las líneas alabeadas y de las superficies desarrollables* [68], que era el texto base de su asignatura de doctorado. En este libro se estudian las curvas en el espacio obtenidas como intersección de cuádricas, teniendo como base la clasificación de las cuádricas según **Staudt**. El contrapunto métrico o analítico[11] a las enseñanzas proyectivas sintéticas de **Torroja** lo ponía **Vegas**[12] con su libro de texto *Tratado de geometría analítica* que tuvo una segunda edición renovada en dos volúmenes los años 1906 y 1907, en la que se acentúa el paraleleismo con el libro sintético de **Torroja**. Las obras de ambos autores tienen como características la falta de bibliografía y de propuestas para estudios más avanzados.

Para hacer el doctorado **Rey Pastor** optó por la geometría sintética frente al análisis matemático, al que se incorporó en los años siguientes. Bien pudo influir en la elección el hecho de que la posición de **Torroja** era dominante en la matemática española del momento, algo importante para un estudiante brillante con prisa para alcanzar una posición profesional a causa de su situación familiar, pues era huérfano de padre desde 1906. Además, el estudiante **Rey Pastor** tuvo gran admiración por la agudeza matemática de su profesor de geometría de los últimos cursos, **Álvarez Ude**[13]. Otro dato a favor de la geometría como opción doctoral de quien finalmente fue un destacado analista pudo ser su relación con **S. Cámara**, que estudiaba en Zaragoza dos cursos por delante y compartía con él una actividad de clases particulares mientras preparaba el doctorado[14]. **Rey Pastor** tuvo que conocer bien la tesis doctoral de **Cámara**, *Apuntes para la teoría geométrica de la línea cíclica*, que sigue el más puro estilo sintético de **Torroja**, pero se detiene impotente ante problemas

---

[8]En estos dos últimos cursos se cursaban también las asignaturas Cosmografía y Física del Globo, y Astronomía esférica y Geodesia.

[9]**Luis Octavio de Toledo Zulueta** (1857-1934), véase [48]. Sobre el doctorado véase [12].

[10]Citaremos repetidamente fragmentos de *Fundamentos*, indicando con [*F.* n] una cita de la página *n*.

[11]Hasta tal punto estaba subordinada la geometría analítica a la sintética, que las tesis doctorales de tipo analítico no pasaban del aprobado, mientras que las de estilo sintético se calificaban con sobresaliente. Véase [13].

[12]**Miguel Vegas** (1865-1943), también catedrático de la Central y discípulo de **Torroja**.

[13]**José Gabriel Álvarez Ude** (1876-1958), el más notable discípulo de **Torroja**, cuya cátedra en Madrid ocupó al jubilarse el maestro.

[14]**Sixto Cámara Tecedor** (1886-1964). Realizó oficialmente el doctorado en Madrid, pero sin dejar de residir en la capital aragonesa, donde tenía su destino como oficial de infantería. Se doctoró el 26 de junio de 1908, al tiempo que su joven amigo Julio terminaba su licenciatura. Véase [10, 11].

[15]La tesis de **Cámara** defendida en 1908 y publicada con un título algo distinto [5], daba la versión sintética de algunos resultados analíticos de **Darboux** [9].

proyectivos métricos que necesitan el uso de elementos imaginarios, inabordables desde el método sintético[15]. El reto de disponer de una teoría sintética del imaginario geométrico quedaría grabado en la mente del joven matemático.

Poco antes de la tesis de **Rey Pastor**, en junio de 1909, sus profesores geómetras de Madrid fueron protagonistas en la Academia de Ciencias. **Vegas** ingresó en ella con un discurso sobre la *Interpretación geométrica del imaginarismo* [70] y **Torroja** se encargó del discurso de contestación haciendo un resumen de la situación de los conocimientos que había en España sobre la geometría compleja. Ambos discursos reflejan un alto grado de autocomplacencia por parte de los personajes hegemónicos de la geometría nacional, que no planteaban opciones de actualización y progreso. Su discípulo no tardó en poner remedio a esta situación, aunque su actuación no estuvo exenta de algunas contradicciones, como más adelante veremos.

**Rey Pastor** utilizó en su tesis, *Correspondencia entre formas de primera categoría y aplicación al estudio de algunas de segunda*[16], los elementos imaginarios a la manera de **Staudt**, siguiendo a **Torroja**, para estudiar la construcción sintética de curvas de orden superior mediante una teoría de correspondencias basada en un principio fundamental, que renuncia a demostrar geométricamente porque su prueba sólo es posible usando el teorema fundamental del álgebra, el cual a su vez necesita los recursos del análisis. Como es característico de la geometría del programa oficial español [43], la tesis, siendo brillante en su contexto nacional, versó sobre una materia anticuada desde el punto de vista internacional, como se aprecia de inmediato observando las referencias en que se apoya.

**b) Análisis complejo.** Como su antiguo alumno **Rey Pastor** reconoció[17], corresponde a **García de Galdeano** el mérito de haber importado a España la teoría de las funciones de variable compleja de **Cauchy**. La fecha que asigna **Rey Pastor** a esta efemérides es 1883, que es la de publicación del *Tratado de Álgebra* de **García de Galdeano** [25], que amplió con un segundo volumen en 1886. Esta obra contiene, entre otros temas, —hay que recordar la escasa distinción que se hacía en esa época entre álgebra y análisis— una exposición de los elementos de la teoría de las funciones de variable compleja que actualizó en su voluminoso *Tratado de Análisis matemático* [26] , en el que introdujo adelantos de la segunda mitad del XIX tomados de libros franceses. La publicación del *Tratado de Análisis matemático* en Zaragoza coincide con el inicio de la carrera universitaria de **Rey Pastor**, quien fue testigo directo y sin duda interesado cuando, en 1907, su profesor de cálculo infinitesimal publicó un libro de poco más de doscientas páginas titulado *Exposición sumaria de las teorías matemáticas* [27], en el que da una rápida visión de los temas que hubiera querido añadir al *Tratado* para formar, con otros previos a éste, la proyectada *Nueva enciclopedia matemática* que no pudo completar. El material sumario sobre funciones de variable compleja que allí se encuentra adentra al lector en la senda trazada por **Riemann** y **Weierstrass**, si bien los temas clave de la prolongación analítica y la representación conforme están tan sólo esbozados; este es el camino, preferentemente en la línea más geométrica de **Riemann**, que **Rey Pastor** siguió en sus estudios de posgrado en Alemania.

Otro libro al alcance de **Rey Pastor** fue la *Introducción al estudio de las funciones de variable compleja* de **Octavio de Toledo** [45] publicado también en 1907; esta obra trata el tema a un nivel similar al del *Tratado* de **Galdeano**, que cita como referencia, pero lo hace de modo monográfico y quizás por ello más organizado como texto. Ambos catedráticos escribieron sus libros a partir de otros extranjeros, sin participación activa en la investigación, con el propósito de mejorar la información científica nacional y promover los estudios matemáticos superiores, logrando unos libros que hubieran podido ser textos universitarios de introducción al tema razonablemente buenos; pero en ese momento la variable compleja no figuraba siquiera en el plan de estudios vigente, el "funesto plan de 1900" en palabras de **Rey Pastor**, que tuvo que seguirlo. Decía **García de Galdeano** al iniciar el prólogo del *Tratado*:

> *"Es difícil publicar una obra adaptada a los planes vigentes en las universidades españolas y al mismo tiempo conforme con el actual grado de desenvolvimiento científico ... Las teorías que se han desarrollado con gran impulso en las naciones cultas, arraigando*

[16]Defendida en 5 de julio de 1909 y publicada un año después con el nuevo título *Correspondencia de figuras elementales, con aplicación al estudio de las figuras que engendran.* Toda la obra geométrica de **Rey Pastor** fue analizada en la tesis doctoral de **Ana Millán** [41], realizada en la Universidad de Zaragoza bajo la dirección de **L. Español** y **M. Hormigón**.

[17]Discurso pronunciado en Valladolid, en 1915, ante la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (en lo sucesivo AEPPC), que versó sobre la cultura matemática española. Sobre la AEPPC véase [2].

> *en sus planes de estudios universitarios, nos son por completo desconocidas".*

Por su parte, **Octavio de Toledo** quiso imitar el proyecto de **Galdeano** al publicar el libro antes citado como volumen primero de unos *Estudios de análisis matemático* que pretendían

> *"... vulgarizar el conocimiento de una multitud de teoremas de esta rama de la matemática, que tanto por no exigirse en los cursos de nuestras Universidades y Escuelas especiales, cuanto por tratarse incidental y poco sistemáticamente en la mayoría de las obras matemáticas que circulan en nuestro país son en éste poco conocidas y cultivadas".*

Por otra parte, en las obras de **García de Galdeano** pudo también **Rey Pastor** seguir la pista de opciones geométricas modernas en la línea del Programa de Erlangen de **Klein** y de los grupos de transformaciones de **Lie**, cuyo desarrollo analítico se decantaba ya hacia finales del sigio. Avanzar en la implantación en España del programa geométrico kleiniano fue otra de las líneas en las que **Rey Pastor** dio un gran impulso a partir de las iniciativas de su antiguo profesor zaragozano.

**1.2. Actividad profesional.** Una vez doctorado, el joven geómetra pasó a ser auxiliar de su maestro **Torroja** en la Universidad Central de Madrid. Del entorno temático de la tesis, publicada en 1910, extrajo **Rey Pastor** entre 1909 y 1911 varias publicaciones en revistas españolas y dos comunicaciones que presentó en el congreso de la AEPPC celebrado en Valencia (1910). Al año siguiente la asociación celebró congreso en Granada y allí acudió el neófito con comunicaciones de análisis, especialidad en la que también produjo algún artículo. Todo ello le permitió estrenarse como profesional y cimentar el prestigio que le llevaría a la cátedra en junio de 1911. La cátedra fue de análisis matemático, aunque su principal currículo era geométrico, pero su prestigio era tal, en plena juventud, que sin duda hubiera ganado cualquier otra, y obtuvo la primera a la que pudo presentarse.

Una vez resuelta su vida al llegar a catedrático, el salto adelante que dio fue iniciarse como investigador internacional, para lo que encontró unas condiciones favorables que no tuvieron las generaciones anteriores. La más decisiva fue la posibilidad de obtener pensiones de la JAE, fundada en 1907, para pasar cursos completos en los centros de investigación más adecuados a sus objetivos. Lo hizo dos veces antes de la Primera Guerra Mundial, en Berlín (1911-12) y en Gotinga (1913-14). El curso intermedio lo pasó en España, en la Universidad de Oviedo, desde donde se trasladó a Madrid, ganando una nueva oposición, en junio de 1913. Se verá en este apartado que, si algún ámbito de la matemática merece ser llamado a jugar un papel nuclear en la primera producción matemática de **Rey Pastor**, éste es la teoría de los imaginarios, tanto en su versión analítica como geométrica.

**a) Geometría compleja.** El problema del encuentro profundo entre la geometría sintética y el análisis, puesto de manifiesto en su tesis doctoral, será una de las preocupaciones constantes en esta primera etapa de **Rey Pastor**. Mientras estaba en Berlín, avanzó en la investigación sintética sobre curvas de orden superior iniciada en la tesis, preparando la memoria, *Teoría geométrica de la polaridad en las figuras de primera y segunda categoría* [57], con la que ganó en 1912 un concurso convocado por la Academia de Ciencias de Madrid[18].

El primer capítulo de esta memoria es un resumen de la teoría de **Kötter** que, en particular, contiene la teoría sintética de los imaginarios y alguna de sus representaciones reales, con diversas llamadas a pie de página que remiten al estudio de los aspectos fundamentadores de la teoría que aparecerán en su obra *Fundamentos*, elaborada después de esta memoria pero publicada en primer lugar. En efecto, el manuscrito de *Fundamentos* recibió un premio de la Academia de Ciencias de Madrid en 1914 y se publicó en 1916. **Rey Pastor** presentó esta nueva obra como "fruto de la estancia del autor en las Universidades alemanas como Memoria de pensionado".

*Fundamentos* tienen tres partes bien diferenciadas. La primera es una exposición general y completa de las geometrías de **Klein** y sus equivalencias, con la que perfecciona la introducción de este tema en España iniciada por **García de Galdeano**. **Rey Pastor** completó la difusión del *Programa de Erlangen* publicando versiones

[18]Sorprendentemente, no se publicó hasta 1929. La causa más probable es que su autor pensara remodelar el trabajo después de la investigación sobre los fundamentos de la geometría compleja que estaba iniciando. La Academia publicó la obra cuando el proyecto de reforma quedó definitivamente dejado de lado.

de esta primera parte en revistas españolas, argentinas e italianas entre 1916 y 1918.

La segunda parte de *Fundamentos* está dedicada a la geometría proyectiva real y la tercera a la compleja, ambas tratadas con el método sintético y edificada la última a partir de la anterior. Es en la tercera donde **Rey Pastor** realiza un profundo buceo en busca de los fundamentos de la geometría sintética de las curvas para mejorar el trabajo de **Kötter**[19] y "vencer el punto trascendente" de la geometría, aquél que sólo se prueba usando el análisis. Pero en realidad sólo venció con la ayuda de la intuición geométrica espacial, en el espacio intuitivo y no en el abstracto, según sus propias palabras, como se verá más adelante.

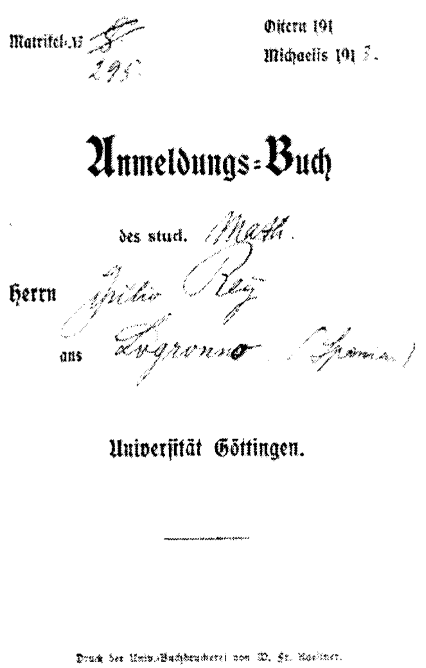


Fig. 1. Registro de **Rey Pastor** en Gotinga

**Rey Pastor** redactó por sí mismo las dos obras anteriores durante sus pensionados, aprovechando las bibliotecas alemanas pero aislado, pues en las universidades alemanas ya no se ocupaba nadie de las curvas por método sintético. Conoció los planteamientos de la geometría proyectiva de fin de siglo, en particular de la compleja, a través de la *Encyklopädie* alemana de Taubner, que se empezó a publicar bajo la dirección de **Klein** en 1898 para sintetizar los avances de la matemática en el siglo XIX[20]. **Rey Pastor** sólo menciona la *Encyklopädie* en la primera parte de *Fundamentos*, la referida a la geometría del *Programa de Erlangen*, donde cita el artículo que **Fano** dedica a los grupos continuos. El otro artículo que redactó **Fano**, también de 1907, en el que se exponen en paralelo los desarrollos de la geometría sintética y la analítica, lleva de la mano hasta **Kötter** y **Paolis**[21], y también describe la teoría de los imaginarios desde **Staudt** hasta **Segre**, **Juel** y **Study**[22]; unos y otros son puntos de partida para **Rey Pastor**. Este fascículo de **Fano** se complementa con el de **Schoenflies** dedicado a la geometría proyectiva, en el que se mencionan las mismas representaciones reales que considera **Rey Pastor** en la tercera parte de *Fundamentos*.

El estudio axiomático del espacio complejo iniciado en *Fundamentos* fue continuado de inmediato en la tesis doctoral de **Fernández Baños**, dirigida por **Rey Pastor** desde el Laboratorio y Seminario Matemático de la JAE. La tesis se leyó en 1915, mientras *Fundamentos* estaba en prensa, pero la publicación escrita [24], posiblemente ampliada, tardó dos años[23].

### b) Análisis complejo.

**Rey Pastor** inició la investigación sobre análisis complejo cuando preparaba las primeras oposiciones, pues necesitaba la variable compleja para exponer adecuadamente algunos temas del programa de la asignatura de segundo curso relativos a las ecuaciones algebraicas. A tal efecto, presentó dos comunicaciones al congreso que celebró en Granada (1911) la AEPPC: una

---

[19]**E. Kötter** (1859-1922). Véase [37].

[20]Se conoció en España sobre todo a través de la traducción francesa [44] iniciada en 1904, y más a partir de 1912 gracias a la difusión en la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, sociedad fundada un año antes. Los fascículos de esta obra dedicados a cónicas y cuádricas fueron citados por **García de Galdeano** en [27]. Sobre las revistas de esta primera época de la Sociedad Matemática Española véase [4].

[21]**R. de Paolis** (1854-1892). Véase [46].

[22]**C. Segre** (1862-1930), véase [62, 63, 64, 65]. **S. C. Juel** (1855-1935), véase [33, 34]. **E. Study** (1862-1930), véase [66].

[23]**Olegario Fernández Baños** (1886-1946), empezó geómetra y terminó siendo, desde 1934, el primer catedrático de Estadística matemática en la universidad española, con plaza en la capital. Véase su biografía en [39]. Leyó la tesis, titulada *Construcción de espacios complejos contenidos en $E_n$ y sus representaciones reales*, el 6 de diciembre de 1915.

[24]En las referencias finales sólo incluimos los libros de **Rey Pastor** más relacionados con este trabajo, para tener referencias precisas de los artículos y otras obras del autor que citemos remitimos al lector a los listados de la obra completa de **Rey Pastor** que se encuentran al final de [52] o de [14], este último elaborado por **E. Ortiz** y **M. Ortiz**.

se titulaba *Sobre la representación conforme* y la otra *El exceso algebraico y la teoría de ecuaciones numéricas*[24]. Con el tiempo, estos temas pasaron a su libro *Lecciones de álgebra*, cuya primera edición fue en 1924. En la solicitud de pensión a la JAE el año 1911 aparece esta consideración[25]:

> *"De las dos ramas principales de la Matemática, que son Análisis y Geometría, ha adquirido la segunda un considerable desarrrollo en nuestro país, gracias a la introducción del método de Staudt por el sabio maestro Dr. Eduardo Torroja, hasta el punto de perjudicar el progreso del Análisis, que hoy se halla completamente estacionado."*

Obtuvo la pensión en septiembre y marchó a Berlín, donde siguió un curso de funciones analíticas de **Schwarz**, otro de funciones automorfas y poliédricas de **Schottky** y un tercero de ecuaciones algebraicas de **Schur**. Consecuencia de este año de formación especializada son dos trabajos —*Aplicaciones algebraicas de la representación conforme* y *Representación conforme de recintos espiriformes*, de los que sólo publicó el primero— que presentó al congreso de la AEPPC celebrado en Madrid en junio de 1913, al mismo tiempo que obtenía la cátedra de Análisis matemático de la Central. A mediados de julio, de nuevo pensionado por la JAE, marchó a Gotinga, donde recibió lecciones sobre representación conforme de **Carathéodory** y **Runge**. Regresó para iniciar en Madrid el curso 1914–1915, terminando así, a causa de la guerra, sus formación como investigador en Alemania.

Dos frutos inmediatos dejó para la matemática española esta segunda estancia: la comunicación *Resolución elemental del problema de Dirichlet para el círculo*, presentada al congreso de la AEPPC celebrado en Valladolid en 1915 y, sobre todo, el curso avanzado *Teoría de la representació conforme* impartido el mismo año en Barcelona, en el Instituto de Estudios Catalanes[26].

Fig. 2. **Rey Pastor** fotografiado en Zaragoza, hacia 1915

Dos frutos inmediatos dejó para la matemática española esta segunda estancia: la comunicación *Resolución elemental del problema de Dirichlet para el círculo*, presentada al congreso de la AEPPC celebrado en Valladolid en 1915 y, sobre todo, el curso avanzado *Teoría de la representació conforme* impartido el mismo año en Barcelona, en el Instituto de Estudios Catalanes[27].

Aquí terminó prácticamente su trabajo original en este campo de la representación conforme, aunque dictó cursos y dirigió alguna tesis en el Laboratorio Matemático de la JAE, particularmente la de **Pineda**, díscipulo que aparecerá más adelante en este trabajo[28], pero también las de **Rodríguez Sanz** y **Orts Aracil**. En su viaje a Buenos Aires durante el curso 1917-18 dictó un curso introductorio[29], y también en Madrid dio un curso en 1919. Su último trabajo en esta línea fue la comunicación al Congreso Internacional de los Matemáticos celebrado en Bolonia en 1920, *Transformation conforme des aires infinies sur le plan ouvert*, que es una reescritura de la parte final del curso dado en Barcelona cinco años antes. En su posterior actividad investigadora, a partir de la segunda mitad de los años veinte, centrada sobre todo en la sumación de series divergentes [58], trabajó profusamente en prolongación analítica.

[25] Tomada de pág. 12 del artículo de **J. M. Sánchez Ron** "Julio Rey Pastor y la Junta para Ampliación de Estudios", en [15], 9-41.

[26] **Terradas** le había pedido que trajera de Alemania información actualizada sobre la representación conforme, así se originó este curso que el propio **Terradas** redactó en catalán, demorándose su publicación un par de años [55]. Para la biografía de **E. Terradas Illa** (1883-1950) véase [60].

[27] **Terradas** le había pedido que trajera de Alemania información actualizada sobre la representación conforme, así se originó este curso que el propio **Terradas** redactó en catalán, demorándose su publicación un par de años [55]. Para la biografía de **E. Terradas Illa** (1883-1950) véase [60].

[28] **Pedro Pineda** (1891-1983). Véase su biografía en [28]. La tesis de **Pineda**, *Transformaciones conformes según el método de Bieberbach*, fue leída el día 19 de junio de 1917.

[29] *Resumen de la teoría de las funciones analíticas y sus aplicaciones físicas*, publicado por el Centro de Estudiantes de Ingeniería de Buenos Aires en 1918.

**1.3. La representación conforme analítica.** Interesa ahora dar una sucinta descripción de algunos aspectos de los trabajos de **Rey Pastor** sobre la representación conforme en el marco del análisis complejo, luego le tocará el turno a los de naturaleza geométrica proyectiva.

Las tres comunicaciones a los congresos de la AEP-PC que fueron publicadas forman una unidad[30]. En *Sobre la representación conforme* (1911) dio una "demostración directa del teorema de Cauchy por medio de las propiedades de la representación conforme", siendo el referido "teorema de Cauchy" el que calcula el número de raíces de una ecuación $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y) = 0$ contenidas en un recinto mediante el exceso algebraico de la fracción $\frac{P}{Q}$ calculado en el contorno del recinto. Luego, en *El exceso algebraico y la teoría de ecuaciones numéricas* (1911) utiliza la teoría del exceso y el teorema anterior para calcular el número de raíces reales contenidas en un intervalo. Finalmente, en *Aplicaciones algebraicas de la representación conforme* (1913) extiende lo anterior a raíces reales complejas contenidas en un recinto, usando la representación conforme mediante una estrategia que contempla dos etapas:

> "*1º Estudio general de la función algebraica entera en cada uno de los semiplanos determinados por el eje imaginario.*
>
> *2º Aplicación a los recintos transformados de éstos por funciones algebraicas.*"

Pasemos al curso avanzado de Barcelona *Teoría de la representació conforme*. Se dividió en siete conferencias con los siguientes títulos: *Propiedades de las funciones analíticas.— Representación conforme de recintos elementales.— El lema de Schwarz (1870) y sus aplicaciones.— Teoremas de Koebe y de Bieberbach.— Teorema de existencia de Riemann.— Principio de simetría de Schwarz. Método alternante. Representación conforme de recintos limitados por curvas analíticas.— Aplicación de la representación conforme al problema de Dirichlet.— Teorema general de la representación conforme.* En este curso las novedades no son los temas sino la forma de exponerlos, de acuerdo con las métodos más al día en la teoría de funciones, así lo manifestó el propio **Koebe** en la reseña del libro aparecida en el *Jahrbuch*[31].

Interesa resaltar, a los efectos del tema que motiva este artículo, que la conferencia sexta trata del *principio de simetría de Schwarz* y de la simetría respecto de una curva analítica, asunto central en la definición proyectiva de la curva analítica, como luego se verá. En este problema el método usado es similar al resaltado a propósito del último de los artículos antes citados: se estudia la simetría respecto a un segmento rectilíneo y se usa la representación conforme para definir la simetría respecto del arco analítico imagen de dicho segmento. Si el segmento es el eje real, la simetría se asocia a la conjugación compleja, y simetría y conjugación se corresponden en la representación.

## 2. Las curvas en geometría sintética

Entre las nociones básicas que centraron la atención matemática de **Rey Pastor** ocupa un papel relevante la noción de curva, ya sea la curva continua $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ de Jordan, la curva algebraica $f(x,y) = 0$, siendo $f$ un polinomio con coeficientes reales o complejos, o bien, la más general de todas, la curva analítica con un parámetro real $t$,

$$z = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots, \quad \frac{dz}{dt} \neq 0,$$

como la representó **Rey Pastor** en [55]. Estos tres tipos de curva son estudiados en *Fundamentos* en el marco de la geometría proyectiva sintética. En esta obra se propuso, entre otros objetivos,

> "*Llegar, con recursos exclusivamente geométricos, hasta introducir en esta ciencia el concepto de curva analítica proyectiva, que es el más general hoy poseído por el análisis*". [*F.* XX]

**Rey Pastor** culmina la obra logrando este objetivo —sin olvidar algunas consideraciones sobre el rigor que se harán más adelante— y afirmando:

> "*Y si no pareciera demasiado atrevido nuestro intento, anunciaríamos que la definición geométrica que logramos es más general y primitiva que la del Análisis, pues comprende por igual a los puntos propios e impropios, y con ella se define toda la curva, sin necesidad de las superposiciones y prolongaciones*

[30] Así lo puso de manifiesto por primera vez el argentino **Pascual Llorente** [38].

[31] Ref. JFM 45.1336.01.

> *que necesita el Análisis para obtenerla".* [*F.* 428]

En el apartado siguiente daremos un rápido repaso al contenido de las dos primeras partes de *Fundamentos* para dedicar después más atención a la tercera parte dedicada a la geometría compleja, que culmina con el teorema fundamental de la geometría algebraica y la noción de curva analítica.

**2.1. Viaje a los fundamentos.** Los críticos de la época que hicieron recensiones públicas de *Fundamentos* consideraron atractivo y original el tratamiento dado por **Rey Pastor** a la geometría proyectiva sintética real y compleja, destacando entre ellas la de **Bieberbach** en el *Jahrbuch*[32], que enjuicia la obra así:

> *"...El autor da, a partir del programa Erlangen de Klein y utilizando métodos puramente sintéticos, una brillante visión de conjunto de las ideas y métodos fundamentales de los temas que trata. Con frecuencia da nuevos resultados y, en muchos casos, métodos nuevos de demostración. Su análisis comparativo de las diferentes teorías de los imaginarios es particularmente exitosa. Además, el autor hace progresar el algoritmo de las colineaciones con su cálculo vectorial proyectivo. Traslada a la geometría proyectiva muchas nociones del análisis, como curva analítica, superficie de Riemann, representación conforme. Querría resaltar la bella demostración del principio de correspondencia de Jonquières-Chasles.".*

En efecto, la primera parte es un exposición experta pero sin aparato técnico, de muy notable ejecución en setenta páginas, de la noción de geometría definida por grupos de transformaciones y de las equivalencias entre geometrías así definidas. El espíritu kleineano de esta parte impregna el resto de la obra, pero es independiente de ella; su presencia se justifica por la novedad que en esos años representaba todavía este enfoque en amplios sectores de la comunidad matemática europea, más todavía en la española.

La segunda parte de *Fundamentos* contiene la geometría proyectiva real en poco más de doscientas páginas. El enfoque es axiomático, dentro de la línea de las axiomáticas que dan importancia al aspecto *psicológico*, que pide que los axiomas reflejen la intuición geométrica, tendencia prehilbertiana basada en la ideas de **Klein** seguidas por **Pasch** y otros. Desde **Hilbert** se impuso el enfoque *lógico* que justifica los axiomas simplemente por su consistencia y, en menor medida, independencia. **Rey Pastor** dedica unas páginas de corte lógico al "espacio proyectivo abstracto de $n$ dimensiones", sus incidencias y dualidades, pero la línea general de la obra, no exenta de disquisiciones laterales, transcurre en la axiomática psicológica a la manera de **Pasch**, **Peano**, **Moore** y **Schur**. Así, a partir de los conceptos primitivos de *punto* y *segmento*, construye la recta por prolongaciones, luego el plano, y finalmente el espacio mediante diez *axiomas gráficos* imbricados con las necesarias definiciones y los teoremas básicos. Además, demuestra con originalidad la independencia y compatibilidad de estos axiomas. Finalmente, construye el *espacio proyectivo* a la manera de **Klein**: añadiendo los *puntos impropios* definidos por radiaciones de rectas coplanarias a una región limitada del espacio dado previamente por los axiomas gráficos.

Una de las ideas que expresa el autor de *Fundamentos* es que la geometría sintética se agota si no incorpora las herramientas que hacen triunfar al análisis:

> *"...la rama proyectiva, y en especial el método sintético, han quedado relegados a segundo término...* [porque] *la total separación del Análisis ha contribuído al agotamiento de la Geometría ...* [que] *podría tomar del Análisis las ideas que pueden ser útiles a su desarrollo, como éste toma de la Geometría las que convienen a su misión".* [*F.* XVIII-XIX]

Afirma **Rey Pastor**, refiriéndose a los imaginarios, que "si exceptuamos la tendencia de **Study**, nada concreto de ha hecho todavía en este sentido", y así uno de los fines de *Fundamentos* es:

> *"...aportar a la Geometría proyectiva multitud de recursos que, á pesar de ser esencialmente geométricos, sólo en el Análisis han sido utilizados hasta ahora, como son: Teoría de conjuntos,*

[32] JFM 46.0880.02. Traducción propia.

> *Representación conforme, Superficie o plano múltiple de Riemann, etc."* [*F.* XX]

Pero ya en la parte de geometría real empieza a realizar la introducción de cuestiones como la continuidad y la topología real (que llama teoría de conjuntos) en el espacio proyectivo. Para ello enuncia el siguiente *axioma de continuidad* (el número once, sumado a los diez axiomas gráficos del espacio inicial):

> *"Dados infinitos segmentos $\overline{AA_1}$, $\overline{AA_2}$, $\overline{AA_3}, \ldots$, tales que cada uno contiene al anterior, y todos ellos están contenidos en $\overline{AB}$, hay un segmento $\overline{AL}$ interior a $\overline{AB}$, ó coincidente con él, que los comprende a todos, y tal que ningún otro segmento $\overline{AL'}$ interior a $\overline{AL}$ cumple igual condición."* [*F.* 163]

Apoyado en este axioma (y los diez anteriores) demuestra el teorema de **Cantor** de los intervalos encajados. Luego, a partir de la noción natural de *polígono proyectivo*, introduce la de *entorno de un punto* (polígono proyectivo que tiene al punto en su interior) y a partir de ella surgen puntos de acumulación y conjuntos, derivados, cerrados, perfectos, etc. La topología cantoriana en versión proyectiva sintética. Demuestra el teorema de **Bolzano** y el de **Borel** sobre finitud de cubrimientos, en este contexto por polígonos proyectivos. Ahora está en condiciones de definir las *correspondencias continuas* y con ellas el concepto proyectivo de *curva de Jordan*. La correspondencia continua la define por el método usual de entornos[33], dando este ejemplo:

> *"La correspondencia armónica respecto de un par $MN$ es continua..."* [*F.* 183]

Con la noción de correspondencia continua surge clara la definición de *curva de Jordan* y una de sus propiedades:

> "...curva de Jordan: *Conjunto de puntos en correspondencia biunívoca y continua con los puntos de un segmento.* [F. *185*] ...
>
> *... Toda curva de Jordan (cerrada o abierta) es un conjunto cerrado."* [*F.* 188]

Aunque a veces **Rey Pastor** trabaja sólo con conjuntos cerrados, también define un tipo de conjunto abierto que llama *recinto proyectivo*. Define la noción en el plano, pero añade que la definición se repite en cualquier espacio de dimensión $n \geq 2$. Un recinto proyectivo es un subconjunto del plano, distinto del plano total, con todos sus puntos interiores y *conexo*. Por conjunto conexo entiende que

> *"... entre dos puntos cualesquiera $A$, $B$, del mismo se puede trazar una línea quebrada de número finito de lados, formada por puntos interiores."* [*F.* 187]

Más adelante, relaciona esta forma finita de conexión por segmentos con la conexión por caminos mediante este teorema:

> *"Si un conjunto formado por puntos interiores tiene la propiedad de que dos cualesquiera de ellos pueden unirse por una curva de Jordan perteneciente al conjunto, éste es un recinto."* [*F.* 189]

Para completar el estudio del espacio proyectivo real aborda la teoría de la proyectividad. En este par de capítulos destacan dos temas. Por un lado el tratamiento del teorema fundamental de la recta proyectiva de **Staudt**, demostrado con todo rigor después de un análisis histórico de las demostraciones previas incompletas por defectos axiomáticos[34]. El segundo logro importante es el *cálculo vectorial proyectivo*[35], un algoritmo original que permite al autor calcular con las versiones proyectivas de las semejanzas, ya sea respecto de un punto fijo $\mathbf{\Omega}$ (métrica euclídea) o de una involución fija $\mathbf{\Omega\overline{\Omega}}$[36] (métrica no euclídea). Los vectores son en este caso clases de equivalencias de segmentos (pares ordenados de puntos) definidas por superposición mediante proyectividades que fijan el punto $\mathbf{\Omega}$ en un caso y la involución $\mathbf{\Omega\overline{\Omega}}$ en otro. El caso de segmentos o vectores de primera especie (respecto de $\mathbf{\Omega}$) ya aparece desarrollado

[33] Si habitualmente denota los puntos por $A$, denota un conjunto de puntos con el símbolo $\bar{A}$. Dados conjuntos $\bar{A}$ y $\bar{A}'$, una correspondencia entre ellos se escribe $\bar{A} : \bar{A}'$.

[34] Véase [42] para un estudio detallado de este asunto.

[35] Véase [16] para un estudio más pormenorizado de este cálculo.

[36] Esta notación se corresponde con la conjugación, pues se refiere a dar la involución por sus puntos fijos, que son uno conjugado del otro cuando son complejos.

por **Pasch** y **Schur**, pero el de segunda categoría (respecto de $\mathbf{\Omega\overline{\Omega}}$) es original de **Rey Pastor**. Así se expresa el autor al final de su exposición de este cálculo:

> *"Sobre esta nueva teoría vectorial proyectiva, en que el vector aparece como representante de una colineación, no podemos citar ningún trabajo que a ella se dedique, ni siquiera en que se exponga esta idea. Precisamente á este nuevo cálculo vectorial debemos la mayor parte de los resultados que logramos en la tercera parte, sobre todo los relativos al* punto trascendente *de la Geometría algebraica."* [*F.* 288]

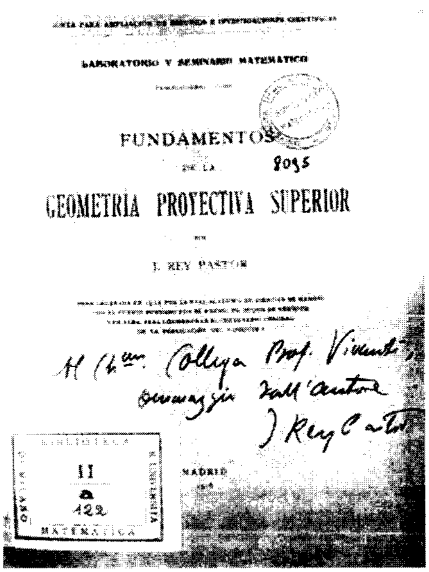


Fig. 3. Ejemplar de *Fundamentos* en la Universidad de Milán

**2.2. El espacio proyectivo complejo.** Llegamos a la tercera parte de *Fundamentos*, dedicada a al geometría proyectiva compleja. Son unas ciento cuarenta páginas divididas en cuatro capítulos cuyos títulos son: *El espacio complejo y la proyectividad compleja. La representación conforme proyectiva. Geometría proyectiva de las figuras algebraicas. El concepto de curva analítica proyectiva.*

La primera tarea es definir los elementos imaginarios, lo que hace para la recta y el plano siguiendo a **Staudt**, para quien un punto imaginario $\mathbf{A}$[37] es una involución elíptica (sin puntos dobles) más un sentido en la recta soporte, de modo que el sentido opuesto corresponde al punto conjugado $\overline{\mathbf{A}}$.

> *"Para definir un punto imaginario basta dar dos pares de la involución, más el sentido correspondiente; éste queda fijado dando los cuatro puntos en el orden en que se presentan al recorrer la recta en dicho sentido. Así pues:*
>
> $$\mathbf{A} \equiv ABCD \equiv BCDA \equiv CDAB \equiv DABC$$
> $$\overline{\mathbf{A}} \equiv DCBA \equiv ADCB \equiv BADC \equiv CBAD$$
>
> *Como los cuatro puntos de la cuaterna no son independientes, es posible fijar dos de ellos pertenecientes a á distinto par. Cada punto imaginario queda así definido por un solo par de puntos, conjugados de aquellos dos fijos en la involución respectiva ..."* [*F.* 293]

En el plano, las rectas imaginarias aparecen dualmente, como involuciones en haces. Hasta aquí el asunto esta claro, pero a partir de la dimensión 3 hay que introducir colineaciones involutivas, lo que complica en exceso el imaginarismo geométrico. **Rey Pastor** generaliza la solución que **August** dio para el espacio tridimensional a una dimensión arbitraria, obteniendo que

> *"... hay $m+1$ especies distintas de elementos imaginarios de $m$ dimensiones."* [*F.* 299]

Ya no le dedica más atención al espacio complejo general, pues su objetivo en la obra se refiere al plano y a las curvas contenidas en él. **Rey Pastor** cierra el planteamiento abstracto general con este argumento:

> *"Como para el desarrollo de nuestro plan sólo necesitamos los elementos complejos de primera categoría, que se reducen, en resumen, á la involución sobre una recta, sólo éstos estudiamos con todo detalle en los artículos que siguen. Respecto del espacio complejo de $n$ dimensiones, nos basta con haber llegado a obtenerlo, ofreciendo a los geómetras*

[37]Esta es la notación utilizada en *Fundamentos*, letras "mayúsculas griegas" que aparecen en negrita, como se vio antes con $\mathbf{\Omega}$.

*españoles este nuevo campo de investigaciones que imperfectamente hemos roturado, en el cual podrán cosechar sin gran dificultad resultados importantes."* [*F.* 300]

Después de definir a la manera de **Staudt** los elementos imaginarios, considera otros sistemas de definición, los de **Segre**, **Klein** y **Amodeo**, y los compara con el fin de utilizar uno u otro según le resulte conveniente; así por ejemplo, al explicar que **Klein** adopta la proyectividad cíclica en vez de la involutiva de **Staudt** para definir el punto imaginario de una recta real, dice:

> *"Para nosotros, como hemos adoptado el sistema de Staudt, este método de Klein y sus análogos nos dan* nuevas representaciones *de los elementos imaginarios, que relacionaremos con la de Staudt, porque su empleo puede ser útil en muchas ocasiones. Así, pues,* no *demostraremos con la proyectividad cíclica que hay una sola recta que une dos puntos, etc., pues esto ya lo hemos hecho partiendo de la definición de Staudt; nuestro problema es analizar cuál es la construcción de dicha recta con el nuevo recurso".* [*F.* 303]

El siguiente tema que aborda es la representación real de las figuras complejas, de nuevo haciendo un análisis de las soluciones conocidas, de **Gauss**, **Staudt** y **Riemann**, y las relaciones entre ellas, que constituyen el fundamento de su teoría de la proyectividad compleja. Para estudiar esta proyectividad llama *hilos* a los conjuntos de elementos complejos (reales o imaginarios) cuya representación real sea un *continuo* (una curva en el caso de la representación plana de **Gauss**) y en particular son *cadenas* los hilos cuya curva asociada es una cónica en la representación plana. Estudiando estas figuras llega a un importante teorema:

> *"La representación plana o esférica de toda correspondencia biunívoca entre dos figuras complejas, que transforma cadenas en cadenas, es conforme."* [*F.* 332]

Este teorema le permite llamar a las correspondencias biunívocas que conservan las cadenas de dos maneras: *proyectividades* si la representación conforme asociada es *directa* y *antiproyectividades* si es *inversa*. Para terminar el capítulo, dedica unas páginas a estudiar la determinación y propiedades de estas correspondencias.

Este modo de definir la proyectividad (antiproyectividad) compleja difiere de los utilizados por **Juel** y **Segre**, que fueron los últimos que esbozaron un tratamiento geométrico de este tema hacia 1890.

Hasta aquí **Rey Pastor** ha procedido en *Fundamentos* de modo riguroso, si bien con explicaciones más bien ligeras, tratando de dar las primera ideas de los temas y dejando el desarrollo posterior para otros. En la introducción de la obra ya lo dejó claro:

> *"No siendo éste un libro de texto, no se busquen en él detalles que el lector puede completar; en muchas cuestiones ponemos solamente los jalones necesarios para que alguien emprenda la construcción completa; por eso titulamos* Fundamentos *y no* Tratado." [*F.* XXI]

Pero a partir de aquí, en los tres capítulos que faltan, los temas no sólo se esbozan sino que la exposición se vuelve intuitiva y el autor recorre sin la precisión debida un camino que le lleva a resultados importantes pero necesitados de posterior consolidación, una tarea que ni él ni otros realizarían.

**2.3. La representación conforme sintética.** El propósito de rigor que persigue **Rey Pastor** se ve limitado a partir de este punto, al pasar de la geometría elemental plana a la superior, esto es, al abordar la representación conforme arbitraria y no sólo la lineal o cuadrática; así lo reconoce el propio autor:

> *"Hasta aquí, todos los problemas que hemos resuelto eran lineales o cuadráticos, y su desarrollo era fácil con método sintético; mas ahora entramos de lleno en el campo de las funciones arbitrarias, no expresables por medio de las funciones elementales del análisis, y la dificultad que en éste presentan, sube de punto cuando se quieren abordar con método sintético. Esta consideración, y la de tratarse de un tema completamente nuevo en geometría, hacen de este capítulo acreedor a la benevolencia del lector.*

> *Así como la edificación axiomática del análisis no se ha logrado todavía para este género de cuestiones, y la moderna teoría de funciones, según Riemann, necesita en todo momento de la intuición geométrica, de igual modo el concepto de rigor en los capítulos que siguen, tiene significado muy distinto que en los anteriores. Ya no operamos en el espacio abstracto, en el cual edificamos la teoría de la proyectividad real, cuyo estudio puede hacerse con los símbolos de la Lógica formal; ahora nos referimos al espacio intuitivo."* [*F.* 345-46]

Con estas limitaciones estudia las correspondencias conformes para con ellas atacar los dos últimos capítulos, dedicados a fundamentar en geometría sintética la noción de curva.

En este tramo final *Fundamentos* trata de geometría métrica plana en el marco proyectivo, es decir, del plano proyectivo real con el axioma de continuidad más una recta impropia $\omega$ destacada y en ella una involución elíptica con puntos dobles imaginarios conjugados $\mathbf{\Omega}$ y $\overline{\mathbf{\Omega}}$, de modo que la involución se representa por los puntos doble en un cierto orden: $\mathbf{\Omega}\overline{\mathbf{\Omega}}$. A partir del axioma de continuidad se definen las tangentes a las curvas y **Rey Pastor** puede llamar *conforme directa* a una correspondencia continua $(A_i):(B_i)$ de un plano en sí mismo —que en general será multívoca— tal que los haces de rectas tangentes en cada dos puntos correspondientes $A_i$ y $B_i$ son proyectivos y a las rectas $A_i\mathbf{\Omega}$ y $A_i\overline{\mathbf{\Omega}}$ corresponden respectivamente las rectas $B_i\mathbf{\Omega}$ y $B_i\overline{\mathbf{\Omega}}$. Y se llamará *conforme inversa* si, en las mismas condiciones, al par $A_i\mathbf{\Omega}, A_i\overline{\mathbf{\Omega}}$ corresponde el par $B_i\overline{\mathbf{\Omega}}, B_i\mathbf{\Omega}$. Después puede caracterizar las correspondencias conformes mediante igualdades del cálculo vectorial proyectivo verificadas por los segmentos de segunda especie determinados por las tangentes en la recta fundamental $\omega$. El cálculo vectorial proyectivo permitía también estudiar la *torsión* respecto de un centro O (que no es sino el equivalente proyectivo de la semejanza).

Por otra parte, con un proceso de paso al límite a lo largo de curvas cuyas tangentes engendran colineaciones, asocia a cada par $A, B$ de puntos asociados en una correspondencia una torsión $T$ *indicatriz* que sirve de instrumento para estudiar la correspondencia. Por ejemplo, las correspondencias conformes directas están caracterizadas por ser $T$ independiente de las tangentes elegidas para su definición en todos los pares de puntos homólogos. También asocia a cada par homólogo un punto $C$ *derivado por diferencia*, probando que la correspondencia derivada por diferencia, es decir la que se establece entre $A$ y $C$, es también conforme. Fijando un punto $U$ además del centro de torsión $O$, asocia al par de puntos correspondientes $A, B$ un nuevo punto $B'$ que llama *derivado* y así puede obtener derivados sucesivos $B''$ etc., lo que le permite llamar puntos singulares de orden $h$ a los puntos $A$ que tienen coincidentes con $O$ sus $h$ primeros derivados. Buena parte del capítulo se dedica al estudio de estas correspondencias derivadas con las técnicas del cálculo proyectivo antes mencionado, para terminar con un teorema sobre el número de vueltas en los puntos singulares:

> *"Si el punto $A$ es múltiple de orden $h$ y $B$ de orden $k$, cada rayo $a$ del haz $A$ tiene $k$ rayos homólogos $b$ en el haz $B$, y cada uno de éstos tiene $h$ homólogos en el haz $A$. Al recorrer $k$ veces $a$ el haz $A$ en sentido constante, cada uno de sus homólogos recorre el haz $B$ en el mismo sentido, cubriéndolo $h$ veces".* [*F.* 367]

A lo largo de toda la obra, el autor había sido muy cuidadoso "en dar para cada cuestión una reseña bibliográfica, lo más completa posible en memorias fundamentales", pero en la bibliografía final de este capítulo afirma no haber

> "*... logrado encontrar memoria ninguna donde se introduzca la representación conforme en geometría, a pesar de ser un recurso esencialmente geométrico. El lector que desee proseguir nuestros modestos estudios condensados en este capítulo a modo de ensayo, habrá de inspirarse, por tanto, en las obras de los analistas. Como los trabajos existentes sobre la teoría de la representación conforme se ocupan principalmente del problema de Riemann, y por tanto, son de muy remota utilidad para el estudio del problema de la representación en pequeño, citaremos solamente la antigua obra Holzmüller.* Einführung in die Theorie der isogonales Verwandtschaften.

> Leipzig, 1882—, *que puede reportar alguna utilidad para estas nuevas investigaciones geométricas que hemos iniciado, llamadas, según creemos, a extender el campo de esta ciencia en muy diversas direcciones".* [*F.* 368]

Por eso será también completamente original todo el remate del libro dedicado a la teoría sintética de las curvas, que se basa en la representación conforme.

**2.4. Las curvas en modo geométrico.** Los dos últimos capítulos de *Fundamentos* están dedicados al estudio de curvas, primero las algebraicas y finalmente las analíticas, que tan sólo alcanza a definir. En ambos casos las herramientas básicas para el estudio de estas figuras son las correspondencias. Entre ellas, **Rey Pastor** selecciona las que se relacionan con la representación conforme:

> *"Diremos que una correspondencia entre dos figuras complejas de primera categoría es* $\left\{\begin{array}{c}\textit{analítica}\\ \textit{antianálitica}\end{array}\right\}$ *si la correspondencia existente entre sus representaciones reales es conforme* $\left\{\begin{array}{l}\textit{directa}\\ \textit{inversa}\end{array}\right\}$.
>
> *Esta definición encierra una propiedad de las figuras complejas en sí mismas, con independencia del sistema de representación elegido ..."* [*F.* 379]

**Rey Pastor** se ocupa de las correspondencias analíticas, porque una simple introducción de la conjugación permite trasladar los teoremas sobre éstas a otros correlativos para las correspondencias antianalíticas. No hay que olvidar que, desde el capítulo anterior, hay pasajes en los que el autor no desarrolla completamente sus ideas, dando tan sólo indicaciones del modo en que se debe proceder para exponerlas completamente.

**Curvas algebraicas. Rey Pastor** ya había trabajado con curvas algebraicas en geometría proyectiva sintética en su tesis doctoral de 1909. Allí las curvas estaban definidas por correspondencias $(m, n)$ y para trabajar con ellas se admitía el *principio de Chasles-Jonquières*, al que **Rey Pastor** llamaba el "*punto trascendente*" de la teoría. Indicaba con ello que la geometría no tenía medios para demostrar dicho enunciado, por eso lo tomaba como principio; en cambio, dicho enunciado es un teorema en geometría analítica, que se reduce al teorema fundamental del álgebra, cuya prueba es trascendente porque necesita recurrir al continuo del análisis.

Uno de los objetivos del autor en *Fundamentos* era vencer este punto trascendente que debió admitir como principio en su tesis doctoral. Para ello considera un tipo particular de correspondencias analíticas:

> *"Las correspondencias analíticas y antianalíticas más importantes son aquellas en que es finito y fijo el número de elementos de cada figura correspondientes a cada uno de la otra. Tales correspondencias se llaman* algebraicas *y* antialgebraicas, *respectivamente."* [*F.* 379]

**Rey Pastor** llama también a estas últimas *proyectividades superiores*, y las denota de esta forma:

$$(\mathbf{A}_i)\overline{\wedge}(\mathbf{B}_i)\ \ (m,n), \qquad (\mathbf{A}_i)\underline{\vee}(\mathbf{B}_i)\ \ (m,n).$$

Como las correspondencias que definen las curvas son multívocas, **Rey Pastor** introduce la superficie de Riemann para estudiarlas reduciéndolas a correspondencias unívocas, como se hace en análisis. Explica el caso de la correspondencia $(2, 1)$ y luego indica las variantes que se deben introducir para que el método sirva con carácter general.

Entrando en materia, **Rey Pastor** aplica a una proyectividad superior $(m, n)$ técnicas de representaciones reales mediante cuádricas, la superficie de Riemann de una de ellas y una correspondencia derivada por diferencias de la proyectivadad superior, conceptos estudiados con anterioridad, y deduce un teorema general sobre el número de vueltas que da, en torno a un eje convenientemente prefijado, el homólogo $C_i$ de un punto $A_i$ en la correspondencia derivada $(A_i) : (C_i)$, cuando éste recorre el contorno de un recinto $\alpha$. La aplicación importante de este teorema es el resultado perseguido por **Rey Pastor**:

> "**Teorema Fundamental de la Geometría Algebraica.**— *Una proyectividad de índices* $(m, n)$, *en una figura compleja de primera categoría, tiene* $m+n$ *elementos de coincidencia (contados cada uno tantas veces como indique*

*su orden de multiplicidad), ó todo elemento coincide con uno de sus homólogos."* [*F.* 386]

Como corolario de este teorema fundamental, **Rey Pastor** prueba que la proyectividad compleja ordinaria, que había definido siguiendo a **Staudt** por el carácter biyectivo y la conservación de las cadenas, es un caso particular de la correspondencia analítica, basada en la condición de conformidad.

En la nota bibliográfica al final del capítulo **Rey Pastor** cita los dos intentos anteriores de superar el "punto trascendente" de la geometría algebraica. Del realizado por **Kötter** en 1887 dice que "sus demostraciones, penosas en grado sumo, son muy poco rigurosas, como consecuencia de la imperfección de la Geometría de entonces". No objeta falta de rigor a la demostración de **Paolis** de 1892, pero dice que el italiano llega a ella "en forma extraordinariamente complicada". **Rey Pastor** reivindica su método de prueba, muy distinto, y el uso que en él hace de la superficie de Riemann, "recurso esencialmente geométrico y, sin embargo, sólo utilizado por los analistas".

**Curvas analíticas.** Se aborda este apartado con el mismo criterio utilizado en el anterior, es decir, con el propósito de resumir la línea argumental que lleva al concepto proyectivo de curva analítica, sin entrar en detalles técnicos. **Rey Pastor** encuentra inspiración en la obra de **Study**, en la que la recta y la cónica reales se caracterizan geométricamente mediante sus simetrías —la simetría ordinaria y la inversión respectivamente—. A partir de estos ejemplos básicos —y **Rey Pastor** no desarrolla otros— define la curva analítica a través de una simetría general, es decir, de una correspondencia continua conforme inversa; sin duda que al hacerlo así tuvo presente el principio de simetría de **Schwarz**, al que dedicó una de las conferencias analíticas sobre la representación conforme que pronunció en Barcelona (1915).

El recurso que permite a **Rey Pastor** enlazar con el principio de simetría es la *representación de Laguerre* de los puntos del plano complejo, que elige después de analizar en detalle las posibilidades de otro tipo de representaciones reales. **Laguerre** dio en forma analítica un método para representar cada punto complejo $\mathbf{A}$ del plano por dos puntos reales ordenados $A, B$, —lo que se escribe $\mathbf{A} \equiv \underrightarrow{AB}$ en *Fundamentos*— que son simétricos respecto a la recta real base del punto complejo que representan; de este modo, el punto complejo conjugado se representa en el mismo par de puntos reales, pero dado en orden inverso, es decir $\overline{\mathbf{A}} \equiv \underrightarrow{BA}$. Como ejemplo más sencillo, si se trata de representar un punto complejo del eje real se obtienen los afijos de un número complejo y su conjugado, simétricos respecto al eje real. Pues bien, lo que hace **Rey Pastor** es introducir esta representación por vía sintética, realizando con fines técnicos algunas construcciones reales asociadas, como obtener el punto real de la recta compleja determinada por dos puntos complejos dados por sus pares reales representantes.

Con el fin de justificar el concepto de la curva compleja que define al final, **Rey Pastor** acude a nociones que encuentra en **Segre** y **Study**, a saber las de hilo y membrana, y las desarrolla en forma sintética. Un conjunto de puntos complejos es un *hilo* si sus representantes reales forman una curva —las cadenas, rectas y circunferencias en la representación geométrica ordinaria de los complejos, son un caso particular de hilos—, y es una *membrana* si se representa en una región del plano, que supone el plano entero para simplificar. **Rey Pastor** invita al estudio de estas figuras porque "no está hecho, ni siquiera iniciado" (dice además: "no dejaremos de llamar con insistencia la atención de los geómetras españoles sobre este nuevo campo de investigación que aquí se les ofrece, seguramente pródigo en resultados importantes") pero él se limita "a investigar la membrana en la proximidad de uno de sus puntos", buscando las condiciones de existencia de tangente única, que es la característica de las funciones analíticas. Para ello, toma todos los hilos que pasan por un punto de la membrana y estudia las tangentes a cada hilo a fin de aislar el caso en que todas ellas coincidan.

Para determinar la tangente a un hilo en un punto $\mathbf{A} \equiv \underrightarrow{AB}$ considera la correspondencia continua entre los pares de puntos reales representantes (según **Laguerre**) de los puntos complejos del hilo; así, mientras los puntos $A$ recorren una curva real los puntos $B$ hacen lo propio con otra. Además, asocia al hilo otras tres curvas reales y encuentra una notable variedad de relaciones geométricas entre las cinco curvas así obtenidas. Llama *determinación infinitesimal del hilo* en uno de sus puntos al conocimiento de los cinco puntos reales correspondientes, uno en cada curva, y a sus cinco tangentes respectivas, probando que la torsión de la correspondencia en el par $A, B$ determina infinitesimalmente el hilo en dicho punto.

Con este estudio previo de los hilos y sus tangentes, está ya en condiciones de abordar los mismos temas con las membranas, estableciendo que "las tangentes en un punto de una membrana a los infinitos hilos que pasan por él, forman, en general, un hilo de rectas complejas" (debe notarse que el hilo de rectas se define de modo dual o correlativo al hilo de puntos). Finalmente, demuestra que

> "*...la condición necesaria y suficiente para que todos los hilos de una membrana que pasan por cada punto de ella tengan la misma tangente, es que la correspondencia* $(A_i):(B_i)$ *que define la membrana, sea conforme inversa en todos los pares* $A_iB_i$." [*F.* 424]

En el desarrollo de estas demostraciones juega un importante papel técnico el cálculo proyectivo repetidamente mencionado.

Llegados a este punto surge de manera natural la definición, en la que aparece el par fundamental del plano, pero de modo que aquélla es independiente de dicho par, pues se cambia de par mediante una colineación conforme. La definición anunciada y las primeras propiedades de la curva proyectiva compleja son:

> "*Curva analítica es el conjunto de puntos complejos* $\mathbf{A}_i \equiv \overrightarrow{A_iB_i}$ *cuyos vectores representantes están determinados por una correspondencia* $(A_i):(B_i)$ *continua, que es conforme inversa respecto del par fundamental* $\mathbf{\Omega\overline{\Omega}}$...
>
> *a) La curva analítica tiene tangente única en cada uno de sus puntos; todos los hilos que pasan por el mismo, son tangentes entre sí.*
>
> *b) La correspondencia* $(B_i):(A_i)$ *inversa de* $(A_i):(B_i)$ *define la curva analítica conjugada de ésta; la condición necesaria y suficiente para que la curva sea real, es decir, para que coincida con su conjugada, es que la correspondencia conforme inversa que la define, sea involutiva.*" [*F.* 429]

Para terminar, **Rey Pastor** expone los ejemplos simples de **Study** y a partir de ellos aplica el nombre de simetría respecto de una curva analítica a la correspondencia conforme inversa que la define, de modo que

> "*...la simetría respecto de una curva analítica es una propiedad invariante respecto de todas las transformaciones conformes directas del plano*". [*F.* 431]

Si el análisis utiliza para definir la curva la existencia de tangente única para después obtener la simetría, la aproximación geométrica de **Rey Pastor** invierte el orden, tomando la correspondencia conforme inversa que luego se llama simetría como condición definidora. Aquí termina *Fundamentos*, una vez alcanzada la definición el autor deja para el futuro, de su mano o de las de sus discípulos, el desarrollo de una teoría sintética de la curva analítica en el plano proyectivo complejo.

**2.5. Un proyecto contradictorio.** **Rey Pastor** no volvió sobre el tema de la curva analítica proyectiva, más aún, con *Fundamentos* termina, salvo episodios menores[38], su obra escrita sobre geometría sintética, si bien es cierto que sus planes iniciales fueron otros:

> "*Si estos* Fundamentos *hallan acogida favorable, emprenderemos la publicación de otra obra, continuación de ésta, sobre* Geometría proyectiva sintética de las figuras algebraicas". [*F.* 401]

Esta segunda parte hubiera sido una reformulación de *Teoría geométrica de la polaridad* [57] a partir de los nuevos fundamentos. Pero el proyecto sintético no prosperó y esta nueva obra no fue realizada, de modo que el libro sobre la polaridad geométrica fue finalmente publicado por la Academia de Ciencias de Madrid en 1929 tal como había sido escrito en 1912.

No obstante, al escribir *Fundamentos* **Rey Pastor** tenía, además de sus objetivos geométricos, otra pretensión al servicio de la cual puso su amplio despliegue bibliográfico. La expresó así:

> "*De este modo pretendemos llenar otro fin, quizás más importante que los anteriores: presentando a los jóvenes matemáticos un cuadro del estado actual de esta ciencia; señalándoles los campos que aún están por cultivar, y donde pueden cosecharse frutos importantes, ahorrándoles las investigaciones*

[38]En Buenos Aires, principalmente con motivo de la fundación del Seminario Matemático Argentino en 1928, volvió a proponer investigación sintética como continuación de la planteada en Madrid la década anterior, pero no hubo trabajos relevantes.

> *bibliográficas, preliminar indispensable a todo trabajo matemático, y quizás la parte más penosa de él; en una palabra, orientándolos, quizás llegue a operarse un cambio en la dirección actual de los estudios geométricos en España".* [*F.* XXI-XXII]

Asoma aquí la afiliación de **Rey Pastor** al movimiento renovador de la generación del filósofo **Ortega y Gasset**, que pretendía de modo muy principal la modernización científica de España[39] En este punto se hace patente la contradicción en que se movió **Rey Pastor**, pues sus dos memorias sintéticas premiadas por la Academia fueron escritas durante sus estancias Alemania, por lo que era conocedor de que en las universidades alemanas ya no se trabajaba sobre curvas por método sintético, así que no debió esperar que tuviera demasiado éxito su iniciativa pretendidamente modernizadora, y en todo caso su desarrollo sólo podría ser autárquico, al hilo de los conocimientos obtenidos en el plan de estudios oficial, pero sin contactos exteriores. Como afirmó en 1920, al final de su discurso de su investidura como académico ([56], pág. 20), sus viajes a Alemania le habían impulsado a

> *"...soñar que también la matemática viva, actualmente en elaboración por artífices eminentes que no es preciso citar, y en la cual colaboran en la medida de sus fuerzas profesores y alumnos universitarios de tantos países, llegaría a interesar a algunos de nuestros jóvenes, no inferiores en inteligencia ni aplicación a los de aquellas otras naciones".*

Pero la geometría sintética ya no formaba parte de esa matemática viva, el impulso dado por **Torroja** a la geometría española, siendo cierto en su momento, había quedado obsoleto. La lista de eminentes investigadores que propone en el discurso del año 20 para importar sus teorías, "clásicos de la segunda mitad del siglo XIX, cuyos nombres, lanzados como un cartel de desafío a nuestra ignorancia por un benemérito maestro, desde su cátedra provinciana", esa lista no apunta hacia la geometría sintética[40].

Parece poco probable que **Rey Pastor** no hubiera captado —en su puesta al día con la *Encyklopädie* de Taubner y en sus estancias en Alemania— la fuerza de los nuevos desarrollos analíticos en la geometría de las curvas y su conexión con los grupos de transformaciones, pues dirigió algunos trabajos sobre curvas $W$ y analagmáticas. También es digno de mención que tras pasar por la universidad de **Hilbert** no se sintiera más atraido por su método axiomático más abstracto. Veamos para terminar un apunte de estas dos variantes en contrapunto a la dirección seguida por **Rey Pastor**.

**Variante analítica.** La geometría compleja evolucionaba mejor por el camino analítico, tendencia que se consolidó definitivamente cuando se generalizaron en la comunidad internacional, a partir de 1930, los métodos diferenciales de **Cartan**[41] basados en las concepciones geométricas de **Riemann**, **Klein** y **Lie**. Pero esta línea evolutiva ya era notoria en **Segre** y **Study**, así que más bien parece que **Rey Pastor** se abandonó a la inercia sintética española y, necesitado de sacarle partido, se lanzó por esa vía e hizo lo propio con sus primeros estudiantes, que participaban de las mismas condiciones iniciales. Aunque pudo ser favorecida por el aislamiento ocasionado por la guerra, esta opción tuvo que ser en alguna medida consciente y de ahí la contradicción antes señalada.

Bajo la misma influencia de **Segre** y **Study** se estaba desarrollando un tratamiento de los mismos objetos matemáticos basado en conjuntos, grupos y funciones, los elementos básicos de la nueva matemática según las conferencias ateneístas[42] de **Rey Pastor** en el año 1915. Esto no se le escaparía a **Rey Pastor**, que también sería consciente de la diferencia de modernidad que había entre las obras de referencia utilizadas en sus trabajos analíticos y los de su escuela frente a las disponibles para los sintéticos. Citemos como ejemplo de la variante analítica los trabajos de **Young**[43] sobre la geometría de las cadenas, publicados en 1909 y 1910, o la obra *The geometry of the complex domain* [7] de **Coolidge**, matemático norteamericano[44] que antes de instalarse en Harvard estudió, entre 1902 y 1904, con

---

[39] Detalles sobre este asunto pueden verse en [20, 23].

[40] El "benemérito maestro" aludido es **García de Galdeano**.

[41] **E. Cartan** (1868-1951). Véase [6].

[42] Ciclo de conferencias en el Ateneo de Madrid, publicadas un año después [54].

[43] **J. W. Young** (1879-1930). Véase [72, 73].

[44] **J. L. Coolidge** (1873-1954). Conocido principalmente como autor de [8].

**Segre** en Turín y con **Study** en Bonn. En relación con la definición reypastoriana de curva analítica basada en la simetría de **Schwarz** respecto a la curva, deben sacarse a colación los trabajos [35, 36] de **Kasner** (1900 y 1913) sobre geometría conforme —el último de ellos es una comunicación al congreso internacional de Cambridge de 1912—; trabajos no mencionados por **Rey Pastor** que fueron publicados en revistas de amplia difusión, siendo más tarde incorporados por **Coolidge** a su libro de síntesis. El artículo de **Kasner** en Cambridge está dedicado a la búsqueda de invariantes del grupo conforme usando como herramienta la simetría respecto a curvas analíticas, así que pudo interesar a **Rey Pastor**. Mientras éste preparaba su investigación sintética, las ideas de **Kasner** tuvieron desarrollo en un artículo [49] sobre geometría conforme y curvas analíticas que **Pfeiffer** publicó en 1915, citado también por **Coolidge**. Un matemático muy bien informado como **Rey Pastor**, interesado en la geometría compleja, no podía desconocer la existencia de esta variante analítica. En efecto, menciona trabajos analíticos de **Segre**, **Study** y **Coolidge** en las referencias que da en *Fundamentos* para la equivalencia entre las diversas geometrías dadas por sus grupos de transformaciones, cuestión muy vinculada con las representaciones reales de elementos imaginarios.

Sea como fuere, esta variante analítica no atrajo a **Rey Pastor**, y varios de sus primeros discípulos realizaron[45] tesis doctorales sobre geometría sintética, línea de investigación que se desvaneció muy pronto. De hecho, los discípulos que se iniciaron en la geometría sintética no alcanzaron relevancia o llegaron a tenerla después de cambiar de especialidad. Resume esta situación la siguiente cita recogida del discurso que pronunció en 1956, próximo ya a los setenta años, con motivo de la recepción en la Academia de Ciencias de Madrid de su discípulo el brillante analista **San Juan**. Allí dejó escrito:

> *"A fines del siglo XIX damos un salto de gigante con la introducción de Staudt, más estudiado aquí que en Alemania; pero la geometría se enderezó por el rumbo analítico, y tanto Cremona como Torroja y quienes lo seguíamos, quedamos una vez más fuera del cauce".*

Cinco años antes, en una "orientación bibliográfica" del libro *La matemática superior. Métodos y problemas del siglo XIX*[46] había escrito (pág. 101):

> *"En esta misma dirección sintética de Cremona propugnada en España por Torroja, están concebidas las tesis de Rey Pastor (1910) que reacciona contra este método; de Fernández Baños (1917) sobre imaginarismo en España; de Íñiguez Almech (1919) sobre correspondencias; y las monografías de Araujo (1920) sobre inversión y polaridad y de Pineda (1930) sobre colineación compleja".*

Con esta breve indicación **Rey Pastor** no precisa el alcance de su reacción ni tampoco las razones por las que esa reacción parece no haber sido seguida al menos por dos de los discípulos que cita, que son seguidores de *Fundamentos.* En efecto la tesis doctoral de **Fernández Baños** [24], dirigida por **Rey Pastor** en el Laboratorio y Seminario Maremático de la JAE, está dedicada a completar *Fundamentos* sobre la introducción de los elementos imaginarios en espacios de dimensión finita arbitraria, y la memoria de **Pineda** [51], más tardía[47], es todavía heredera directa de *Fundamentos.* En todo caso, estos trabajos, más que aportar grandes novedades, detallaron y completaron aspectos de la obra de **Rey Pastor**, y no alcanzaron la notoriedad de su maestro[48]. En 1939 apareció un libro de **Amodeo** [1][49], que historia desde un punto de vista interno la evolución de la geometría proyectiva sintética. El autor cita profusamente a *Fundamentos*, pero no menciona a niguno de los dos discípulos citados. Más bien escasa y poco relevante fue por tanto la continuidad que tuvo esta línea de trabajo propuesta dentro de la incipiente investigación matemática española, y se pone además de manifiesto

[45]En el Laboratorio y Seminario Matemático de la JAE, fundado en 1915. Sobre la investigación realizada en el Laboratorio véase [3]. **Rey Pastor** dirigió también allí, en estos primeros años, tesis doctorales sobre representación conforme y otros temas numéricos, financieros e históricos

[46]**Rey Pastor** publicó este libro [59] en 1951, ampliando y actualizando sus conferencias del Ateneo de 1915 [54].

[47]Aunque se publicó en 1930, con ella su autor ganó un concurso de premios de la Academia de Ciencias de Madrid en 1924. Llama la atención también la insistencia de la Academia en seguir dando relevancia a estos temas.

[48]La tesis de **Íñiguez**, dirigida por **Álvarez Ude**, al igual que la monografía de **Araujo**, conectan con otros aspectos de la obra geométrica de **Rey Pastor**.

[49]**F. Amodeo** (1859-1946). El mismo año se publicó en Rosario (Argentina) la traducción al castellano que realizó **Nicolás Babini**.

que, en concreto, nada se añadió al tema de la curva analítica proyectiva.

**Variante axiomática.** En el último capítulo de su libro sobre la geometría compleja, **Coolidge** expone la teoría de **Staudt** con el rigor lógico de la escuela hilbertiana, y hace notar allí que lo tradicional es suponer el espacio real y definir a partir de él los elementos complejos como ciertas figuras reales, pero que otra posibilidad es dar una axiomática global que introduzca a la vez los elementos reales y los complejos.

El camino tradicional es el seguido por **Rey Pastor** y su escuela, mientras que el segundo, sugerido por las ideas axiomáticas del momento, lo apuntaron en sus libros de geometría proyectiva **Veblen** y **Young** (1910,18) [69][50], citados de pasada en *Fundamentos* en una nota a pie de página porque "se limitan a dar ligeras nociones" del espacio proyectivo complejo. **Rey Pastor** prefiere la exposición completa que hace **Torroja**, que él intenta modernizar axiomáticamente hasta **Pasch** y **Schur**[51], pero sin entrar de lleno en la línea hilbertiana, de la que sólo menciona sus criterios para la independencia de axiomas y alguna otra cuestión general.

En todo caso, el primer volumen de **Veblen** y **Young** pudo haber sugerido a **Rey Pastor** un tratamiento axiomático de la geometría más abstracto, que al evitar los axiomas de orden y continuidad admite modelos analíticos sobre cuerpos también generales. Con este planteamiento, puede hacerse una geometría proyectiva abstracta tomando como axioma el teorema fundamental de la proyectividad, uno de los "puntos trascendentes" de **Rey Pastor**. Ya en el segundo volumen, los autores introducen nuevos axiomas de orden y continuidad para probar que el sistema algebraico de los puntos de una recta es isomorfo a los números reales, lo que permite probar el teorema fundamental anterior por ser la multiplicación real conmutativa. Añadiendo otro conjunto de axiomas a la geometría proyectivo general obtiene directamente la geometría compleja. Debe notarse que el tratamiento de la geometría compleja en el libro de **Veblen** y **Young** no se hace hasta el segundo volumen, publicado en 1918, después de aparecidos *Fundamentos* y la tesis de **Fernández Baños**.

Aceptar este esquema axiomático hilbertiano hubiera conducido a **Rey Pastor** hacia un enfoque diferente de sus "puntos transcendentes" de la geometría y el álgebra, pero estos fueron los objetivos centrales de su trabajo, que siempre quiso mantener apoyado directamente en los números reales, con lo que su geometría y su álgebra se encontraban desde el inicio de su exposición con la necesidad y la dificultad de tener que demostrar los teoremas fundamentales.

Los comentarios anteriores intentan ayudar a explicar la escasa vigencia que tuvo su proyecto investigador en geometría proyectiva sintética, tanto por su dificultad cuanto por ir contra la corriente de los tiempos. El importante esfuerzo inicial de **Rey Pastor** en este campo, aunque formaba parte de su proyecto modernizador, estaba más atado al pasado heredado de **Torroja** que quería superar que al futuro que él mismo llegó a vislumbrar desde sus años en Alemania. No parece equivocado pensar que **Rey Pastor** fue muy pronto consciente de que el camino sintético era un camino sin salida, pero avanzó por él hasta que agotó las rentas que podía producir en España[52]. Por otra parte, como le sucedió también con el álgebra[53], no aceptó algunos aspectos abstractos de la matemática del nuevo siglo.

## Referencias


[1] **F. Amodeo** (1936) *Origine e svilupio della geometria proiettiva.* Napoli, Pellerano.

[2] **E. Ausejo** (1993) *Por la ciencia y por la patria: la institucionalización de la ciencia en España en el primer tercio del siglo XX.* Madrid, Siglo XXI de España.

[3] **E. Ausejo, A. Millán** (1989) "La organización de la investigación matemática en España en el primer tercio del siglo XX: El Laboratorio y Seminario Matemático de la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (1915-1938)". *LLULL, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 12(23), 261-308.

[4] **E. Ausejo, A. Millán** (1993) "The Spanish Mathematical Society and its periodicals in the first third of the 20th century". En **E. Ausejo, M. Hormigón** (eds.) *Messengers of mathematics: European mathematical journals 1800-1946*, Madrid, Siglo XXI de España, págs. 159-187.

[5] **S. Cámara Tecedor** (1908/09) *Apuntes para la teoría geométrica de las líneas cíclicas de 4º orden y 1ª especie. Anales de la Facultad de Ciencias de Zaragoza*, 7 (1908) 161-173; 8 (1908) 217-232; 9 (1909) 1-61 (publicada exenta, Zaragoza, Tip. de E. Casañal, 1909).


[50] **O. Veblen** (1880-1960). La obra de **Veblen** y **Young** es un trabajo sintético con complementos analíticos, elaborado en la línea axiomática de **Hilbert** y **Hesenberg**.

[51] **M. Pasch** (1843-1930). **F. Schur** (1856-1932). **Rey Pastor** había traducido con **Álvarez Ude** la obra de **Pasch** [47]. También era buen conocedor de la obra de **Schur** [61].

[52] A él mismo y a sus primeros discípulos, que debían sacar partido de las enseñanzas mayoritarias recibidas en la universidad.

[53] Véase [19].

[6] **E. Cartan** (1931) *Leçons sur la géométrie projective complexe.* Paris, Gauthier-Villars.

[7] **J. L. Coolidge** (1924) *The geometry of the complex domain.* Oxford, Oxford University Press.

[8] **J. L. Coolidge** (1940) *A history of geometrical methods.* Oxford, Oxford University Press.

[9] **G. Darboux** (1904) *Étude sur le dévelopement des méthodes géométriques.* Paris, Gauthier-Villars.

[10] **J. J. Escribano** (2004) *Sixto Cámara: biografía de un matemático.* Prólogo de **L. Español**. Logroño, Instituto de Estudios Riojanos.

[11] **J. J. Escribano** (2006) "El 'oficio de matemático' en la primera mitad del siglo XX: Sixto Cámara Tecedor". *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 246-264.

[12] **J. J. Escribano Benito, L. Español González, María Ángeles Martínez García** (2006) "El doctorado español en matemáticas entre 1900 y 1921". *LLULL, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 29, 37-50.

[13] **J. J. Escribano Benito, L. Español González, María Ángeles Martínez García** (2006) "Tesis doctorales de geometría en España entre 1900 y 1921". En **J. A. Pérez Bustamante** *et al.* (eds.) *Actas IX Congreso SEHCYT*, Cádiz, SEHCYT / Universidad de Cádiz, págs. 233-246.

[14] **L. Español González (ed.)** (1985) *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor.* Logroño, Instituto de Estudios Riojanos.

[15] **L. Español González (ed.)** (1990) *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888 1962).* Logroño, Instituto de Estudios Riojanos.

[16] **L. Español González** (1998) "Algunas cuestiones sobre los Fundamentos de la geometría proyectiva superior". En **L. Español** (ed.), *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888 1962).* Logroño, Instituto de Estudios Riojanos, págs. 379-397.

[17] **L. Español González** (1996) "Rey Pastor y la noción geométrica de curva analítica". *Zubía*, 14, (Sec. Varia) 123-125.

[18] **L. Español González (ed.)** (1998) *Matemática y Región: La Rioja. Sobre matemáticos riojanos y matemática en La Rioja.* Logroño, Instituto de Estudios Riojanos.

[19] **L. Español González** (1998) "Rey Pastor ante los cambios en el álgebra de su tiempo". En L. Español (ed.), *Matemática y Región: La Rioja.* Logroño, Instituto de Estudios Riojanos, págs. 63-122.

[20] **L. Español González** (2000) "Julio Rey Pastor y el espíritu del 98". En **E. Ausejo, Maria C. Beltrán** (eds.), *La enseñanza de las ciencias: una perspectiva histórica,* Zaragoza, SEHCTAR, Universidad de Zaragoza, págs. 169-203.

[21] **L. Español González** (2000) "Julio Rey Pastor y la matemática de los imaginarios". En *Homenaje a Julio Luis Fernández Sevilla y Mayela Balmaseda Aróspide*, Logroño, IER, págs. 331-340.

[22] **L. Español González** (2004) "Mariano Hormigón Blánquez, in memoriam". *LLULL, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 27, 502 504.

[23] **L. Español González** (2006) "Julio Rey Pastor. Primeros años españoles: hasta 1920". *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(2). 545-585.

[24] **O. Fernández Baños** (1917) *Estudio sintético de los espacios complejos de n dimensiones.* Madrid, JAE.

[25] **Z. García de Galdeano** (1883) *Tratado de Álgebra.* Toledo, G. Juste.

[26] **Z. García de Galdeano** (1904 05) *Tratado de Análisis matemático.* 5 vols. Zaragoza, Casañal.

[27] **Z. García de Galdeano** (1907) *Exposición sumaria de las teorías matemáticas.* Zaragoza, Casañal.

[28] **F. A. González Redondo, L. de Vicente Laseca** (2005) "El 'oficio de matemático' en España en el siglo XX: Pedro de Pineda y Gutiérrez (Puerto de Santa María (Cádiz), 2.XII.1891 - Madrid, 7.I.1983)". *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 8(3), 837-868.

[29] **J. L. S. Hatton** (1919) *The theory of the imaginary in Geometry.* Cambridge University Press.

[30] **M. Hormigón** (1996) "Paradigms in mathematics: a theoretical model for research into the history of mathematics". En *Paradigms and mathematics*, Madrid, Siglo XXI de España, págs. 1-113.

[31] **M. Hormigón** (2004) "Una aproximación a la biografía científica de Zoel García de Galdeano". *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 7, 282 -294. (Antes en *El Basilisco*, 1984)

[32] **M. Hormigón, A. Millán** (1992) "Projective geometry and applications in the second half of the nineteenth century". *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* 42(129), 269-289.

[33] **S. C. Juel** (1885) *Bidrag til den imaginäre Linies og den imaginärie Plans Geometri.* Copenhague (Diss.).

[34] **S. C. Juel** (1890) "Über einige Grundgebilde der projectiven Geometrie". *Acta Math.* 14, 1 30.

[35] **E. Kasner** (1900) "The invariant theory of the inversion group: geometry upon a quadric surface". *Trans. A.M.S.* 1, 430-498.

[36] **E. Kasner** (1913) "Conformal geometry". *Proc. of the Fifth International Congress of Mathematicians, Cambridge 22 28 August 1912*, vol. 2, 81-87, Cambridge Univ. Press.

[37] **E. Kötter** (1887) *Grundzüge einer rein geometrische Theorie der algebraischen ebenen Curven höherer Ordnung.* Berlin, Academia de Ciencias.

[38] **P. Llorente** (1985) "Una presentación de la obra de Julio Rey Pastor en álgebra". En **L. Español** (ed.) *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor.* Logroño, Instituto de Estudios Riojanos, págs. 119-136.

[39] **M. V. Martínez** (1995) *Olegario Fernández-Baños. Apuntes para una biografía.* Logroño, Gráficas Ochoa.

[40] **A. Millán** (1988) *El matemático Julio Rey Pastor.* Logroño, Universidad de La Rioja / Instituto de Estudios Riojanos.

[41] **A. Millán** (1990) *La obra geométrica de Julio Rey Pastor.* Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

[42] **A. Millán** (1990) "El teorema fundamental de la recta proyectiva en la obra Fundamentos de geometría proyectiva superior de Julio Rey Pastor". En **L. Español** (ed.) *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888 1962).* Logroño, Instituto de Estudios Riojanos, págs. 355-377.

[43] **A. Millán** (1991) "Los estudios de geometría superior en España en el siglo XIX". *LLULL, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 14, 117-186.

[44] **J. Molk (ed.)** (1904 16) *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées.* Paris, Gauthier-Villars.

[45] **L. Octavio de Toledo** (1907) *Introducción al estudio de las funciones de variable compleja.* Madrid, Murillo.

[46] **R. de Paolis** (1892) "Le corrispondenze projettive nelle forme geometriche fondamentali di 1.ª specie". *Mem. Acad. Torino* 42, 495-584.

[47] **M. Pasch** (1913) *Lecciones de geometría moderna.* Madrid, JAE (Trad. **J. Rey Pastor** y **J. G. Álvarez Ude**, de la 2.ª edición alemana, 1913, 1» de 1882).

[48] **J. Peralta** (2005) "Octavio de Toledo, la sucesión de los promotores de nuestro despertar matemático". *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 8, 528-547.

[49] **J. Pfeiffer** (1915) "On the conformal geometry of analytic arcs". *Amer. J. of Math.* 37, 395-430.

[50] **J. Pierpont** (1904) "The history of mathematics in the nineteenth century". *Bulletin of the American Mathematical Society* 11, 136-159.

[51] **P. Pineda** (1930) *Estudio de la colineación compleja en el plano y representación real de la misma.* Madrid, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

[52] **S. Ríos, L.A. Santaló, M. Balanzat,** (1979) *Julio Rey Pastor, matemático.* Madrid, Instituto de España.

[53] **J. Rey Pastor** (1916) *Fundamentos de la geometría proyectiva superior,* Madrid, Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas.

[54] **J. Rey Pastor** (1916) *Introducción a la matemática superior,* Madrid, Corona.

[55] **J. Rey Pastor** (1917) *Teoría de la representació conforme,* Barcelona, Institut d'Estudis Catalans.

[56] **J. Rey Pastor** (1920) *Discurso leído en el acto de recepción,* Madrid, RACEFN.

[57] **J. Rey Pastor** (1929) *Teoría geométrica de la polaridad en las figuras de primera y segunda categoría,* Madrid, Academia de Ciencias.

[58] **J. Rey Pastor** (1931) *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación.* Universidad de Buenos Aires. Reedición de 2006, anotada y comentada por **E. Fernández Moral**, con estudios previos de **A. Durán** y **L. Español**. Logroño, Instituto de Estudios Riojanos.

[59] **J. Rey Pastor** (1951) *La Matemática superior. Métodos y problemas del siglo XIX,* Buenos Aires - Madrid, Ed. Iberoamericana.

[60] **A, Roca, J. M. Sánchez Ron** (1990) *Esteban Terradas (1883-1950): ciencia y técnica en la España contemporánea,* Madrid, INTA.

[61] **F. Schur** (1909) *Grundlagen der Geometrie.* Leipzig.

[62] **C. Segre** (1889-90) "Un nuovo campo di ricerche geometriche". *Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino* 25, 276-301.

[63] **C. Segre** (1890-91) "Un nuovo campo di ricerche geometriche". *Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino* 26, 35-71.

[64] **C. Segre** (1891) "Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche". *Rivista di Matematiche* 1, 42-46.

[65] **C. Segre** (1892) "Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebricic". *Math. Ann.* 40, 413-467.

[66] **E. Study** (1911) *Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehürige Abbildungen.* Leipzig.

[67] **E. Torroja** (1899) *Geometría de la posición.* Madrid, G. Juste.

[68] **E. Torroja** (1904) *Teoría general de las líneas alabeadas y de las superficies desarrollables.* Madrid, I. Fortanet.

[69] **O. Veblen, J. W. Young** (1910-18) *Projective geometry.* 2 vols., Boston, Ginn and Company.

[70] **M. Vegas** (1909) *Interpretación geométrica del imaginarismo.* Madrid, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

[71] **M. A. Velamazán (ed.)** (2005) *Homenaje a Mariano Hormigón (1946-2004).* Zaragoza, Fundación "Rey del Corral" de Investigaciones Marxistas / Servicio de Publicaciones de la Universidad de Zaragoza.

[72] **J. W. Young** (1909) "Two dimensional chains and the associated collineations in a complex plain". *Trans A.M.S.* 11, 280-293.

[73] **J. W. Young** (1910) "The geometry of chains on a complex line". *Annals of Math.* Ser. 2, 51, 33-48.

Recibido el 19 de mayo de 2008

Aceptado para su publicación el 20 de junio de 2008