UNA INTERPRETACION DE PROYECCIONES CRISTALOGRAFICAS EN COORDENADAS HOMOGENEAS

Por: Gabriel Poveda Ramos

1. Introducción

Uno de los principios fundamentales en que se asienta el estudio de la geometría analítica cartesiana es el de la correspondencia biunívoca de conjuntos (n—plas) de números (reales) con puntos de un espacio (vectorial) de n dimensiones E_n. En esta forma, a cada pareja de números reales (x,y) le corresponde un punto en un sistema (plano) de dos coordenadas cartesianas; a cada terna de números reales (x,y,z) corresponde un punto en un sistema (triedro) de tres coordenadas cartesianas. Para simplificar y unificar la notación, en adelante nos referiremos a las coordenadas de un punto usando las letras S_1, S_2, S_3 en lugar de las convencionales x,y,z.

En esta forma, a todo punto del $\left\{\begin{matrix}\text{plano } E_2\\ \text{espacio } E_3\end{matrix}\right\}$ euclidiano le corresponde una $\left\{\begin{matrix}\text{pareja}\\ \text{terna}\end{matrix}\right\}$ de números reales $\left\{\begin{matrix}S_1, S_2\\ S_1, S_2, S_3\end{matrix}\right\}$, teniendo en cuenta que todo punto del $\left\{\begin{matrix}\text{plano } E_2\\ \text{espacio } E_3\end{matrix}\right\}$ euclidiano está a distancia finita del origen de coordenadas 0. Empero, en muchas ocasiones es necesario referirse a lo que se dicen "puntos en el infinito" del $\left\{\begin{matrix}\text{plano } E_2\\ \text{espacio } E_3\end{matrix}\right\}$, como, por ejemplo, cuando se tratan ciertos problemas sobre paralelismo de rectas y de planos. Estos "puntos en el infinito", por su misma definición no pueden ser localizados sobre $\left\{\begin{matrix}E_2\\ E_3\end{matrix}\right\}$, su distancia al origen de coordenadas 0 no puede darse por ningún número real[1], y en consecuencia, no pertenece a $\left\{\begin{matrix}E_2\\ E_3\end{matrix}\right\}$. Por tanto, a ellos no puede hacerse correspon-

[1] Es costumbre usar **el signo** ∞ para denotar el límite de toda sucesión (monótona, creciente) de números reales no acotada superiormente. Es evidente que "∞" no es un número real sino un símbolo cuya utilización abrevia las locuciones del razonamiento. Es en este sentido en el que se dice que dos rectas paralelas "se cortan en un punto a distancia ∞ de todo punto del espacio euclidiano en que ellas están".

der ninguna $\left\{\begin{matrix}\text{pareja o 2–pla}\\ \text{terna o 3–pla}\end{matrix}\right\}$ de las que hemos mencionado y que llamamos **"coordenadas cartesianas"** del punto en cuestión. Ya es bien sabido que, sentados estos principios, se deduce que, en general, un lugar geométrico dado corresponde a una ecuación (única) que se llama **la ecuación del lugar** y, recíprocamente, dada una cierta ecuación en $\left\{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right\}$ variables $\left\{\begin{matrix}S_1, S_2\\ S_1, S_2, S_3\end{matrix}\right\}$, ella es representada por un cierto lugar geométrico (curva, superficie) en $\left\{\begin{matrix}E_2\\E_3\end{matrix}\right\}$. En particular, se sabe que a $\left\{\begin{matrix}\text{una recta r}\\ \text{un plano } \pi\end{matrix}\right\}$ en el espacio $\left\{\begin{matrix}E_2\\E_3\end{matrix}\right\}$ le corresponde una ecuación de la forma

$$\left\{\begin{matrix} aS_1 + bS_2 + k = 0 \\ \alpha S_1 + \beta S_2 + \gamma S_3 + \kappa = 0 \end{matrix}\right\}$$

en donde $\left\{\begin{matrix}a, b, k,\\ \alpha, \beta, \gamma, \kappa\end{matrix}\right\}$ son coeficientes reales, denominados parámetros de $\left\{\begin{matrix}\text{la recta r}\\ \text{el plano } \pi\end{matrix}\right\}$ que determinan completamente en $\left\{\begin{matrix}E_2\\E_3\end{matrix}\right\}$ el lugar $\left\{\begin{matrix}r\\ \pi\end{matrix}\right\}$

Ahora bien. Con el fin da dar una mayor simetría y generalidad a ciertos cálculos y para suprimir las diferencias que las coordenadas cartesianas imponen entre puntos del espacio $\left\{\begin{matrix}E_2\\E_3\end{matrix}\right\}$ y puntos en el infinito, se ha visto la conveniencia de introducir en la geometría analítica las **coordenadas homogéneas.** Este avance fué propiciado desde el campo de la Geometría Proyectiva por los trabajos de PLUCKER, MOBIUS y VON STAUDT, principalmente.

2. Elementos impropios

Si consideramos en un plano una recta g y un punto P exterior a ella, alrededor del cual gira una segunda recta, las dos rectas tienen un punto (real) de intersección común, salvo en el caso en que sean paralelas. Esta excepción la salvamos con-

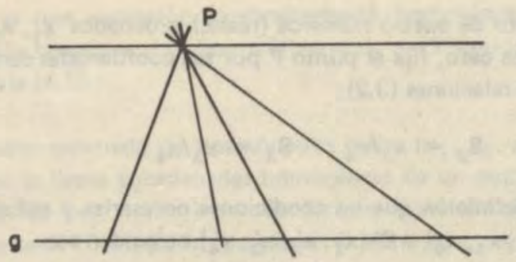


Figura 1

viniendo en decir que, cuando las rectas son paralelas, tienen en común el punto del infinito o **punto impropio**. Con esta definición, dos rectas en un plano tienen siempre un punto común, y el concepto de paralelismo pierde significación. Al girar la recta alrededor de P, el punto de intersección se aleja cada vez más a medida que nos aproximamos a la paralela, lo cual justifica el decir que dos rectas paralelas tienen común el punto impropio (o del infinito). Un punto impropio representa, en consecuencia, una dirección sobre su plano.

Dos planos en el espacio tienen una recta común a menos que sean paralelos. Evitando esta excepción tienen en común la **recta impropia.** Con esto, se cumple que, en general, dos planos tienen una recta común. Las rectas de un plano que pasan a distancia finita de un punto cualquiera se llaman rectas propias, y los puntos de una recta propia que están a distancia finita de uno cualquiera de sus puntos se llaman puntos propios. La recta impropia de un plano cualquiera es formada única y exclusivamente por los puntos impropios del plano. Al conjunto de todas las rectas impropias en el espacio se le llama plano impropio.

Mediante estos convenios se simplifican los enunciados, salvándose las excepciones. Por ejemplo: después de haber introducido los puntos impropios, la proposición "una recta queda determinada por dos puntos" incluye la proposición "una recta está determinada por un punto y una dirección".

3. Definición

Sea P un punto de coordenadas S_1, S_2, S_3 en un sistema cartesiano (triedro trirrectángulo) de coordenadas. Se llaman coordenadas homogéneas de este punto a todo sistema de **cuatro** números x_1, x_2, x_3, x_4 definidos por

$$x_1 = \lambda S_1 \quad x_2 = \lambda S_2 \quad x_3 = \lambda S_3 \quad x_4 = \lambda \tag{3.1}$$

en donde λ es un factor positivo arbitrario (no nulo). Un punto P tiene, entonces, una infinidad de coordenadas homogéneas; además, de las fórmulas (3.1) se deduce

$$S_1 = x_1/\lambda \quad S_2 = x_2/\lambda \quad S_3 = x_3/\lambda \quad \lambda = x_4 \tag{3.2}$$

de manera que el dato de cuatro números (reales) ordenados x_1, x_2, x_3, x_4 de los cuales el último no es cero, fija el punto P por sus coordenadas cartesianas S_1, S_2, S_3 calculadas por las relaciones (3.2):

$$S_1 = x_1/x_4, \quad S_2 = x_2/x_4, \quad S_3 = x_3/x_4 .$$

Resulta de esta definición que las condiciones necesarias y suficientes para que dos puntos $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ y $P'(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ coincidan son

$$\frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{x_3} = \frac{x'_4}{x_4} \qquad (3.3)$$

Estas definiciones que preceden se aplican inmediatamente a la geometría analítica plana haciendo $s_3 = 0 = x_3$

4. Coordenadas homogéneas en el plano

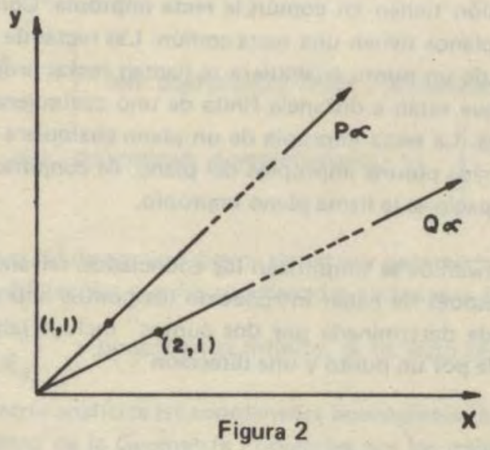


Figura 2

La ecuación de una recta en el plano cartesiano (0 X Y) es

$$ax + by + c = 0 \qquad (4.1)$$

que se puede escribir en la forma

$$ax + by + c \,.\, 1 = 0 \qquad (4.1')$$

la cual, poniendo $x = x_1/x_3$, $y = x_2/x_3$ ($x_3 > 0$), se transforma en

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \qquad (4.2)$$

Esta última es una expresión algebraicamente homogénea (en el sentido de EULER); si en ella tomamos el divisor arbitrario $x_3 = 1$, caemos nuevamente en la ecuación originaria (4.1).

A cada conjunto ordenado de tres números reales (x_1, x_2, x_3) que satisfagan la ecuación (4.2) se le llama **coordenadas homogéneas de un punto sobre la recta.** Y cada terna ordenada (x_1, x_2, x_3) de coordenadas homogéneas corresponde a un único punto que será: (i) un punto propio en el plano, si $x_3 \neq 0$, cuyas coordenadas cartesianas son $(x_1/x_3, x_2/x_3)$; (ii) un punto impropio, si $x_3 = 0$, que no es otro que la dirección de la recta cuyos cosenos direccionales con respecto a los ejes cartesianos son proporcionales, respectivamente, a x_1 y x_2. Así, por ejemplo, en la figura anexa, el punto del infinito de la recta que pasa por los puntos (0,0) y (1,1), señalado como P_∞, tiene como coordenadas homogéneas (1,1,0); y el punto del infinito Q_∞ de la recta que pasa por (0,0) y (2,1), tiene por coordenadas homogéneas (2,1,0); y el punto del infinito del eje x es (1,0,0).

En tales condiciones puede observarse que un mismo punto P en el plano, de coordenadas homogéneas (x_1, x_2, x_3) también está dado por toda otra terna ordenada $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, siendo λ un multiplicador real arbitrario no nulo.

Puesto que para cada punto impropio del plano la tercera coordenada homogénea es 0, la ecuación de la recta impropia del plano es $x_3 = 0$. Además, el eje 0Y tiene por ecuación $x_1 = 0$, y el eje 0X tiene por ecuación $x_2 = 0$. El origen de coordenadas tiene por coordenadas homogéneas (0,0,1), y la terna (0,0,0) representa un punto indeterminado en el plano.

Puesto que toda ecuación de la forma (4.2) representa (corresponde a) una recta en el plano, cada recta queda fijada por los tres parámetros a, b, c, en forma unívoca. De tal manera que existe una correspondencia biunívoca entre cada recta en el plano y cada terna ordenada de números reales (a, b, c). Por otra parte, como la ecuación (4.2) es una forma lineal homogénea respecto a los tres parámetros a, b, c, y guiados por la simetría de las parejas (a, x_1), (b, x_2), (c, x_3), podemos decir que la terna ordenada (a, b, c) son las coordenadas homogéneas de una recta (única) en el plano.

El estudio mismo de la ecuación (4.2) indica que las coordenadas homogéneas (a, b, c) son las de una recta cuya forma canónica es

$$\frac{x}{-c/a} + \frac{y}{-c/b} = 1$$

es decir, una recta cuyos interceptos sobre los ejes de abscisas y ordenadas son, respectivamente $(-c/a)$ y $(-c/b)$. Y si llamamos **índices de MILLER** a los inversos de los interceptos de una recta sobre los dos ejes de coordenadas, puede verse inmediatamente que los índices de MILLER de una recta de coordenadas homogéneas son:

$h = -a/c$ y $k = -b/c$.

Escribiendo entonces la ecuación de la recta como

$$-hx - ky + 1 = 0$$

se observa que la terna $(-h, -k, 1)$ constituye una terna de coordenadas homogéneas de la recta. Toda otra terna $(-\lambda h, -\lambda k, \lambda)$, siendo $\lambda \neq 0$ un número real, será también de coordenadas homogéneas de la misma recta.

Obsérvese que las coordenadas homogéneas de un elemento (punto o recta) propio o impropio del plano, no deben ser todas nulas. En efecto, teniendo en cuenta las definiciones dadas, la terna (0, 0, 0) no representa las coordenadas homogéneas de ninguna recta ni de ningún punto, propios o impropios, en el plano. Los ejes de X y de Y tienen (0, 1, 0) y (1, 0, 0) respectivamente por coordenadas homogéneas.

5. Coordenadas Plückerianas en el plano.

La ecuación de toda recta en el plano cartesiano, que no pase por el origen es, en coordenadas cartesianas

$$ax + by + c = 0 \text{ con } c \neq 0$$

y en coordenadas homogéneas

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \text{ con } c \neq 0$$

siendo (a, b, c) las coordenadas homogéneas de la recta. Si reducimos a 1 la tercera coordenada homogénea de la recta, escribiendo su ecuación en la forma (cartesiana)

$$\left.\begin{array}{ll} & Ax + By + 1 = 0 \\ \text{(homogénea)} & Ax_1 + Bx_2 + 1x_3 = 0 \end{array}\right\} \quad A = \frac{a}{c}, \; B = \frac{b}{c}$$

esas coordenadas homogéneas serán (A, B, 1). Diremos entonces que (A, B) son las coordenadas plückerianas de la recta en cuestión.

De acuerdo con la anterior definición, y puesto que la ecuación de la recta dicha puede escribirse

$$-hx - ky + 1 = 0$$

se concluye que las coordenadas plückerianas de la recta son los negativos de sus índices de Miller, h, k, y por eso serán designadas $(\bar{h}, \bar{k})$.

Las coordenadas plückerianas de una recta paralela al eje 0X serán (o, b), y en general, sus coordenadas homogéneas son (o, b, c). Las coordenadas plückerianas

de una recta paralela al eje 0Y serán (a,o), y, en general, sus coordenadas homogéneas serán (a, o, c), siendo a, b, c, en los paréntesis, números reales no nulos. La recta impropia (o del infinito) tiene, por lo tanto, (o, o) como coordenadas plückerianas, y, en general (0, 0, c) como coordenadas homogéneas, y por tanto su ecuación en coordenadas homogéneas es $x_3 = 0$, o también $cx_3 = 0$ $(c \neq 0)$.

6. Coordenadas homogéneas en el espacio.

En un espacio referido a un sistema de coordenadas cartesianas (0XYZ), cada plano tiene una ecuación de la forma

(cartesiana) $\quad ax + by + cz + d = 0$

(homogénea) $\quad ax + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$

Se dice entonces que la cuaterna (a, b, c, d) de números reales corresponde al plano (único) considerado. A esta cuaterna se llama, entonces, coordenadas homogéneas del plano. De lo dicho se desprende que $(\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d)$, siendo $\lambda \neq 0$ un número real arbitrario, es una cuaterna de coordenadas homogéneas del mismo plano.

La ecuación de todo plano que no pase por el origen, y cuyos interceptos sobre 0X, 0Y y 0Z sean proporcionales a 1/h, 1/k, 1/l respectivamente, puede escribirse en la llamada forma canónica

$$hx + ky + lz = 1$$

siendo h, k, l, los índices de Miller de dicho plano.

Así mismo, para todo plano que no pase por el origen 0, su ecuación puede escribirse en la forma

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(cartesiana)} & Ax + By + Cz + 1 = 0 \\ \text{(homogénea)} & Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + 1 = 0 \end{array}\right\} \quad A = \frac{a}{d}, \; B = \frac{b}{d}, \; C = \frac{c}{d}$$

bajo la cual las coordenadas homogéneas son (A, B, C, 1). Entonces, tal como se dijo de la recta, diremos que (A, B, C) son las coordenadas plückerianas del plano. Como la ecuación del plano en forma canónica es

(cartesiana) $\quad -hx - ky - lz + 1 = 0$

(homogénea) $\quad -hx_1 - kx_2 - lx_3 + 1x_4 = 0$

se deduce que **las coordenadas plückerianas A, B, C de un plano son proporcionales a los negativos de sus índices de Miller:**

$$A = -\lambda h\,,\quad B = -k\lambda\,,\quad C = l\lambda$$

7. La proyección Gnomónica

Como es bien sabido, todo cristal de un mineral puede representarse en un plano mediante la operación de **proyección** de cada uno de los planos que pasan por las distintas caras del cristal, desde un **centro** 0 de proyección, sobre un plano que no pase por ese centro. Esta operación, que es del tipo de las que geométricamente se llaman proyectivas, en esencia nó es otra cosa que el establecimiento de **una correspondencia biunívoca entre planos en un espacio y puntos en un plano.** En consecuencia, esta correspondencia existirá también entre los números reales que definen un plano π en un espacio y los que definen un punto P en un plano.

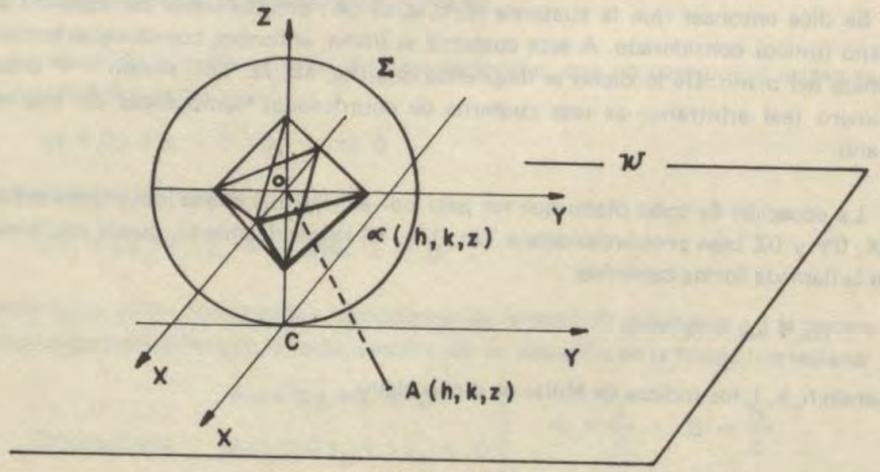


Figura 3
Proyección Gnomónica de un Poliedro

Si, haciendo centro en un punto 0, origen de un sistema de coordenadas cartesianas (0XYZ) de tres dimensiones, se traza una esfera Σ con radio R arbitrario, y luego por el punto $x = 0$, $y = 0$, $z = -R$ se traza un plano ω tangente a Σ, habremos construído el marco de referencia de una **proyección gnomónica.** Al punto 0 se le llama centro de proyección; a Σ se llama **esfera unitaria,** porque, siendo su radio R arbitrario, puede tomársele como unidad de medida para los tres ejes cartesianos; y a ω se le llama plano de la proyección.

Si colocamos un cristal en este sistema de modo que su baricentro coincida con 0, es evidente que ninguna de sus caras pasa por 0 (Propiedad del baricentro de todo poliedro). Además, hagamos coincidir uno de los ejes cristalográficos (más concretamente, el mayor, si el cristal no es de sistema cúbico) con el eje 0Z. Bajando la perpendicular de 0 a cada plano α del cristal, su prolongación en ambos sentidos, corta a ω en un punto A único llamado **polo.** Si α no es paralelo al eje 0Z, A será punto propio de ω; mas si α es paralelo a 0Z, A será punto impropio de ω. En esta forma a cada cara α del cristal le corresponde un solo punto A en el plano de la proyección, punto que se llama **la proyección o representación** gnomónica de α.

Designando cada cara α del cristal con sus índices de Miller en la forma $\alpha(h, k, l)$, y asignando estos mismos números (reales) a la proyección A de α para designarla $A(h, k, l) = A$, podremos observar que tales índices, **como representativos de la proyección A de cada plano** α, cumplen las siguientes propiedades:

a. Si α es paralelo a 0, o sea, si $l = 0$, A es un punto impropio de ω que gráficamente se señala con una flecha que indica una dirección. De manera que toda terna de índices de Miller de la forma (h, k, 0) representa un punto impropio de ω; y viceversa.

b. Si se considera una familia de planos paralelos de α, en el mismo octante de α, familia cuya ecuación genérica es

$$m_1 x + m_2 y + m_3 z = p$$

en la cual m_1, m_2, m_3 son los cosenos direccionales de la normal a la familia, y $p > 0$ es el parámetro variable sobre la familia, se observa inmediatamente que a toda ella la proyección gnomónica hace corresponder un solo punto cuyas coordenadas homogéneas en el plano de la proyección son (m_1, m_2, m_3), respecto al origen C (pié de la normal de 0 a ω) y a ejes CX, CY que son proyecciones de 0X y 0Y sobre ω.

Estas consideraciones muestran **que los índices de Miller de cada cara del cristal son proporcionales a las coordenadas homogéneas del punto que la representa en la proyección gnomónica, y por lo tanto, pueden tomarse directamente como coordenadas homogéneas de dicho punto.**

Este importante resultado permite deducir todas las relaciones estereométricas entre los elementos de un cristal y establecer expresiones algébricas para sus propiedades geométricas a partir únicamente de su representación cristalográfica gnomónica, o simplemente, de la descripción del cristal por el conjunto de los índices de sus caras.

Los inversos de los índices de Miller, o sea los **parámetros de Weiss** son números proporcionales a las longitudes de los interceptos de cada cara a los tres ejes ortogonales en el espacio.

Bajo esta interpretación geométrica de la proyección gnomónica, los índices de Miller dejan de ser medida de los inversos de los interceptos de cada cara sobre los

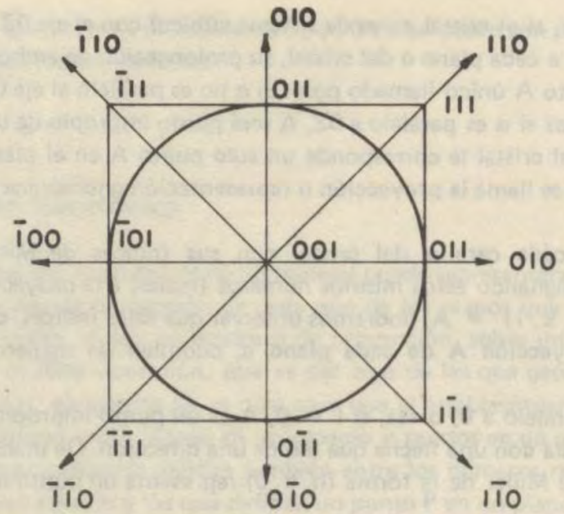


Figura 4
Proyección Gnomónica del Cubo, el Octaedro y el Dodecaedro

tres ejes cristalográficos para ser simplemente coordenadas homogéneas de su punto representativo en la proyección de la cara.

De los otros dos tipos comunes de proyecciones cristalográficas, o sea la esférica y la estereográfica, la proyección gnomónica sobresale por sus ventajas de construcción e interpretación, por una parte; y por la comodidad del estudio de los elementos cristalográficos bajo su consideración como diagrama plano de elementos geométricos determinados por los índices (y los parámetros) del poliedro cristalino.

9. La Ley de los índices racionales

La observación de los cristales de los sólidos ha demostrado que, tomando como origen de coordenadas rectilíneas (tridimensionales) en el cristal un punto adecuado, como por ejemplo, el baricentro o un cierto punto del eje de simetría y orientando convenientemente los tres ejes, toda cara a de todo cristal, determina interceptos sobre tales ejes cuyas longitudes están entre sí en razón de números racionales, si son finitas. Esto quiere decir que los parámetros de WEISS se expresan por números racionales (y/o el símbolo ∞, para designar el intercepto con un eje que sea paralelo a a). Y por tal razón, los índices de Miller (o sea las coordenadas homogéneas del punto A, proyección gnomónica de a) siempre será una terna de números racionales. Para mayor comodidad, y teniendo en cuenta el carácter de estos índices como coordenadas homogéneas que hace que ésto siempre sea posible, suele dárseles como terna de números enteros, sin divisor (entero positivo) común. Para ésto, si fuere necesario, se multiplican los tres índices (si estuvieren en forma fraccionaria) por el mínimo común multiplo de sus denominadores, lo que no altera la validez de la terna como coordenadas homogéneas.

Es bien evidente que si las coordenadas homogéneas de un punto en un plano son siempre números enteros, sus coordenadas cartesianas serán números racionales. En consecuencia, la proyección gnomónica de toda cara de todo cristal referido a ejes ortogonales convenientemente adoptados, es un punto de coordenadas cartesianas racionales. Esto es: la representación gnomónica de un cristal es un conjunto finito de puntos (propios o impropios) del plano que pertenece a la red de MOBIUS completa, en todo el plano 0XY (incluyendo la recta impropia "del infinito").

Los índices de Goldschmidt no son otra cosa que las coordenadas cartesianas del polo representativo de cada cara, respecto a los ejes rectilíneos del plano del diagrama de la proyección gnomónica. De acuerdo con la ley de índices racionales, estos índices se expresarán siempre como una pareja de números racionales.

10. Angulo diedro entre dos caras

Se dice que dos caras de un cristal son contiguas si su intersección coincide con una arista del mismo. En caso contrario se dirá que están separadas. Posponiendo por lo pronto el establecimiento de un criterio de contiguidad o separación de dos caras, trataremos de calcular una expresión para la medida del ángulo diedro formado por los planos de dos caras (contiguas o no), a partir de sus proyecciones gnomónicas, es decir, de sus coordenadas cartesianas en el plano de proyección, y, por ende, de sus índices de Miller.

Sean A_1 y A_2 los polos de dos caras a_1, a_2 de un cristal en su proyección gnomónica, de índices (h_1, k_1, l_1), (h_2, k_2, l_2). En el correspondiente sistema de coordenadas cartesianas en el espacio, las ecuaciones de los planos a_1, a_2, en forma hessiana (o normal), tal como ya se vió, son

$$a_1x + b_1y + c_1z - p_1 = 0 \qquad (p_1 > 0)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z - p_2 = 0 \qquad (p_2 > 0)$$

siendo a_1, b_1, c_1 y a_2, b_2, c_2 los respectivos cosenos direccionales de las normales, desde 0 (orígen de coordenadas en el espacio) a a_1 y a_2, y siendo p_1, p_2 las distancias de 0 a a_1 y a_2.

Como 0 no está sobre ninguna cara, p_1 y p_2 son siempre positivos (no nulos). Así pues, las ecuaciones de a_1 y a_2 se transforman en

$$-\frac{a_1}{p_1}x - \frac{b_1}{p_1}y - \frac{c_1}{p_1}z + 1 = 0$$

$$-\frac{a_2}{p_2}x - \frac{b_2}{p_2}y - \frac{c_2}{p_2}z + 1 = 0$$

expresiones en las que en seguida se reconocen las coordenadas Plückerianas de ambos planos como los coeficientes de x, y, z.

Es una identidad clásica en la geométrica analítica del espacio la que dá el ángulo θ entre dos vectores normales a los dos planos α_1, α_2, y cuyas orientaciones respecto a los ejes están ya fijadas:

$$\cos\theta = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

Se comprende enseguida que el ángulo ϕ (diedro) entre α_1 y α_2 es el suplemento de θ (llamado ángulo de normales). Por eso, a menos de un cambio de signo, se tiene:

$$\cos\phi = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

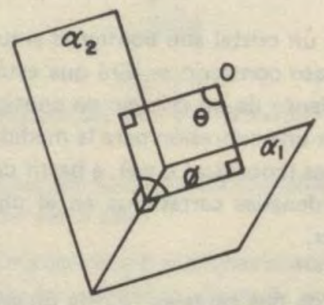


Figura 5

Ahora bien: en virtud de las conclusiones del No. 6, los índices de Miller y las coordenadas plückerianas están interrelacionados por las fórmulas

$$h_1 = \epsilon a_1/p_1 \qquad k_1 = \epsilon b_1/p_1 \qquad l_1 = \epsilon c_1/p_1$$

$$h_2 = \delta a_2/p_2 \qquad k_2 = \delta b_2/p_2 \qquad l_2 = \delta c_2/p_2$$

siendo ϵ, δ, números (racionales) oportunamente elegidos, de modo que las ternas (h_1, k_1, l_1), (h_2, k_2, l_2) lo sean de números enteros, primos entre sí.

Entonces

$$\cos\phi = (h_1h_2 + k_1k_2 + l_1l_2)\ p_1p_2/\epsilon\delta$$

siendo

$$p_1\sqrt{h_1^2 + k_1^2 + l_1^2}\ /\epsilon = 1$$

$$p_2\sqrt{h_2^2 + k_2^2 + l_2^2}\ /\delta = 1$$

de donde

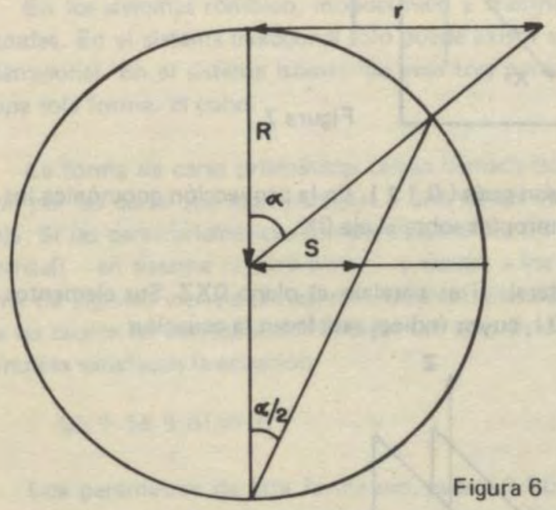
$$\cos\phi = \frac{h_1h_2 + k_1k_2 + l_1l_2}{\sqrt{h_1^2 + k_1^2 + l_1^2}\ \sqrt{h_2^2 + k_2^2 + l_2^2}}$$

será la expresión buscada para el ángulo diedro de las dos caras.

Para tener en cuenta la posibilidad de emplear escalas métricas diferentes para los distintos ejes, conviene dar a la fórmula anterior la forma

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{h_1h_2/m_1^2 + k_1k_2/m_2^2 + l_1l_2/m_3^2}{\sqrt{(h_1^2/m_1^2 + k_1^2/m_2^2 + l_1^2/m_3^2)\ (h_2^2/m_1^2 + k_2^2/m_2^2 + l_2^2/m_3^2)}}$$

en donde m_1, m_2, m_3, son módulos de escala para las coordenadas respectivas. Estos módulos de escala tienen importancia en las representaciones cristalográficas de sistemas con ejes desiguales, para las cuales se suele adoptar como unidad de escala la longitud de cada eje (cristalográfico). En los apartes correspondientes más adelante, se verá la forma particular que adopta la última expresión en los distintos casos, de acuerdo con la observación general de que cada módulo de escala puede tener un distinto valor.



$$s = \operatorname{tg}\alpha/2 = \frac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$s = \frac{1 - 1/\sqrt{1 + r^2}}{r/\sqrt{1 + r^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{R^2 + r^2} - R}{r}\ R$$

Figura 6

Relaciones de distancia al punto central entre la proyección gnomónica (r) y la proyección estereográfica (s)

11. Formas Cristalográficas

Una forma cristalográfica es el conjunto de caras que en un cristal tienen posiciones similares respecto a planos, ejes y centro de simetría y de acuerdo con pres-

cripciones específicas. Se llama forma unitaria o fundamental aquella en la cual los parámetros de Weiss corresponden a la unidad adoptada sobre los ejes. Veremos enseguida que a cada forma corresponde una ecuación que los índices de las caras que le pertenecen están obligados a cumplir. A los coeficientes de que van afectados los índices en dichas ecuaciones los llamaremos parámetros de la forma.

El pinacoide es la forma constituída por dos caras que son paralelas. Si, además, son paralelas a un par de ejes dados, en un sistema con ejes ortogonales, son normales al eje restante. Si el cristal es un poliedro convexo, un pinacoide está constituído solamente por dos caras. Esta será la situación que consideraremos. Un pinacoide puede ser:

a. Pinacoide **a** o pinacoide frontal: si es paralelo al plano 0YZ. Sus elementos son pues, las caras (1 0 0), ($\bar{1}$ 0 0), cuyos índices satisfacen la ecuación

$$0h + 1k + 1l = 0$$

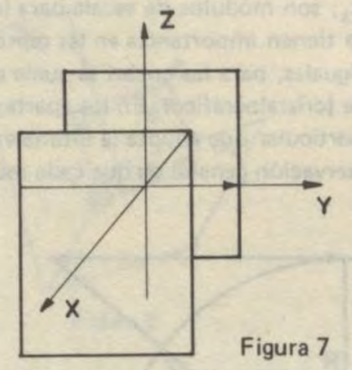


Figura 7

Los parámetros de esta forma son pues (0 1 1). En la proyección gnomónica los polos de estas caras son puntos impropios sobre el eje 0X.

b. Pinacoide **b** o pinacoide lateral: si es paralelo al plano 0XZ. Sus elementos son pues, las caras (0 1 0), (0 $\bar{1}$ 0), cuyos índices satisfacen la ecuación

$$1h + 0k + 1l = 0$$

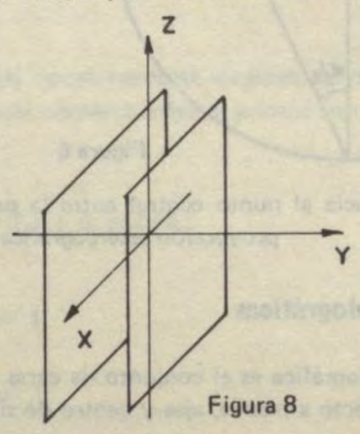


Figura 8

Los parámetros de esta forma son pues, (1 0 1). En la proyección gnomónica los polos de estas caras son puntos impropios sobre el eje 0Y.

c. Pinacoide **c** o pinacoide basal: si es paralelo al plano 0XY. Sus elementos son pues, las caras (0 0 1), (0 0 $\bar{1}$), cuyos índices satisfacen la ecuación

$$1h + 1k + 0l = 0 \cdot$$

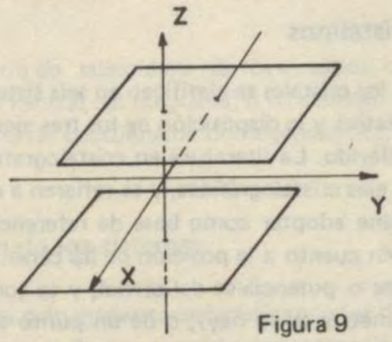


Figura 9

Los parámetros de esta forma son pues, (1 1 0). En la proyección gnomónica, los polos de estas caras coinciden con el origen.

En los sistemas rómbico, monoclínico y triclínico, pueden existir los tres pinacoides. En el sistema hexagonal solo puede existir el pinacoide basal, así como en el tetragonal. En el sistema isométrico esos tres pares de caras paralelas se funden en una sola forma: el cubo.

La forma de caras prismáticas (antes llamada domo), esta constituída en un cristal por las caras que sean paralelas a uno de los ejes 0X u 0Y; pero cortan al tercer eje. Si las caras prismáticas son paralelas al eje 0Y (tomado como el eje mayor del cristal) —en sistema ortorrómbico— y cortan a los otros dos, la forma se llama prisma de segunda especie (antes, macrodomo). Siendo convexo el cristal, tiene 4 caras, a las cuales les corresponden índices del tipo (h o l), ($\bar{h}$ o l), (h o $\bar{l}$), ($\bar{h}$ o $\bar{l}$); estos índices satisfacen la ecuación

$$0h + 1k + 0l = 0$$

Los parámetros de esta forma son, pues (0 1 0). En la proyección gnomónica, los polos de estas caras son puntos propios sobre el eje 0X, distintos del origen.

Si las caras del domo son paralelas al eje 0X (tomado como uno de los ejes menores en el sistema ortorrómbico), y corta a los otros dos, la forma se llama prisma de primera especie (antes, braquidomo). Siendo convexo el cristal, esta forma tiene 4 caras, de índices (0 k l), (0 $\bar{k}$ l), (0 k $\bar{l}$), (0 $\bar{k}$ $\bar{l}$). Tales índices satisfacen la ecuación

$$1h + 0k + 0l = 0$$

Los parámetros del braquidomo son pues (1 0 0). En la proyección gnomónica, los polos de sus caras son puntos propios sobre el eje de y, distintos del origen.

El prisma de tercera especie está constituído por caras paralelas al eje "vertical" 0Z pero cortan los otros dos ejes. Sus caras, naturalmente, tiene índices de forma general (h k 0).

12. Los sistemas cristalinos

Es bien sabido que los cristales se clasifican en seis sistemas cristalinos identificados por la longitud relativa y la disposición de los tres ejes cristalográficos a que todo cristal puede ser referido. La literatura en cristalografía no da definiciones bien precisas de lo que son ejes cristalográficos, y se refieren a ellos como a ciertas líneas imaginarias que conviene adoptar como base de referencia para la descripción del cristal, especialmente en cuanto a la posición de las caras. Tales ejes deben ser paralelos a aristas presentes o potenciales del cristal, y se toman (por conveniencia) a través del centro de simetría (si lo hay), o de un punto situado sobre uno (o más) ejes de simetría (si los hay). Aquí se propone tomar como punto de intersección de los ejes cristalográficos el **baricentro** del cristal que es siempre interior a su volumen (por ser convexos todos los cristales conocidos). En caso de existir simetría, el baricentro coincide con el centro de simetría o está sobre los ejes y los planos de simetría.

En tal forma, definiremos como ejes cristalográficos a un sistema de rectas no coplanares que pasan por el baricentro de un cristal, coincidentes con ejes geométricos naturales, orientados a través de aristas o de vértices o normales a caras opuestas, de manera de constituír un sistema conveniente de referencia para las caras y demás elementos del cristal. La longitud de cada eje entre los puntos en donde perfora la superficie exterior del cristal se llama longitud axial, habiendo definido previamente el módulo de escala adecuado para ese mismo eje.

Resulta así que todos los cristales pertenecen a uno de estos seis tipos, descritos en términos de longitudes axiales y de posiciones relativas:

1. Isométrico: tres ejes ortogonales de igual longitud axial (a) designados a_1, a_2, a_3, dispuestos en triedro recto y derecho.

2. Tetragonal: tres ejes ortogonales, dos de ellos de igual longitud axial (a) y uno de longitud axial diferente (c), designados a_1, a_2, c, que se orientan en triedro recto y derecho.

3. Ortorrómbico: tres ejes ortogonales, de diferentes longitudes axiales (a, b, c), orientados en triedro recto y derecho.

4. Monoclínico: un eje (clinoeje), de longitud axial a, oblicuo a un plano de dos ejes ortogonales: ortoeje b, y eje transverso c.

5. Triclíxico: tres ejes mutuamente oblicuos, de longitudes diferentes o iguales (a, b, c) en triedro derecho, denominados frecuentemente braqui-eje, macro-eje y eje vertical.

6. Hexagonal: tres ejes en un plano "horizontal" desplazados a 120°, y que se designan a_1, a_2, a_3, con la misma unidad de medida, y un eje "vertical", c, perpendicular a los anteriores.

Todos los ejes de simetría de cualquiera de los sistemas, cuyas proyecciones pasen por el origen o punto central del diagrama, o en general, toda recta que cumpla esta última propiedad, tiene las coordenadas homogéneas $(\lambda_1, \lambda_2, 0)$.

13. La Representación de los sistemas

Una vez reconocidas las principales características de los diversos sistemas cristalinos, y teniendo en cuenta la forma como la representación gnomónica hace corresponder un sistema de puntos en un plano a planos en el espacio, y líneas rectas en aquel plano a rectas en el espacio, es relativamente simple establecer los principales resultados analíticos concernientes a tales representaciones, en términos de coordenadas homogéneas.

Conviene señalar que la mencionada correspondencia, que se establece a través de las proyecciones estereo-cristalinas, puede interpretarse como una realización del principio de Dualidad en el espacio, establecido por J. D. GERGONNE (1771-1859) a propósito de los teoremas de Pascal y de Brianchon, y que ha constituído uno de los métodos de estudio más fecundos en Geometría Proyectiva. De acuerdo con este principio, toda proposición acerca de las propiedades proyectivas en el espacio, referente a elementos entre los cuales se cuentan puntos y planos, tiene una "dual" que se obtiene (y subsiste) intercambiando las palabras "punto" y "plano".

A. **Isométrico.** Ya definido el sistema isométrico (regular o cúbico) su proyección gnomónica da lugar a un diagrama que se construye haciendo coincidir los tres ejes principales del cristal con tres ejes ortogonales en el espacio. Dos de estos últimos se proyectan en el plano como un par de ejes de coordenadas cartesianas, con respecto de los cuales puede localizarse cada uno de los polos a los que la proyección de lugar. Ya se vió que si las coordenadas cartesianas (sus índices de Goldschmidt) de un polo P son (ξ, η), sus coordenadas homogéneas, es decir, sus índices de miller son (h, k, l), siendo $h/l = \xi$, $k/l = \eta$.

Estos diagramas tienen todos simetría central respecto al origen 0 (0,0) (con índices 0, 0, 1), y cuando presentan simetría respecto a una recta r_s, ésta pasa por 0 (0,0) y tiene coordenadas homogéneas $(\alpha, \beta, 0)$, representando un eje de simetría del cristal.

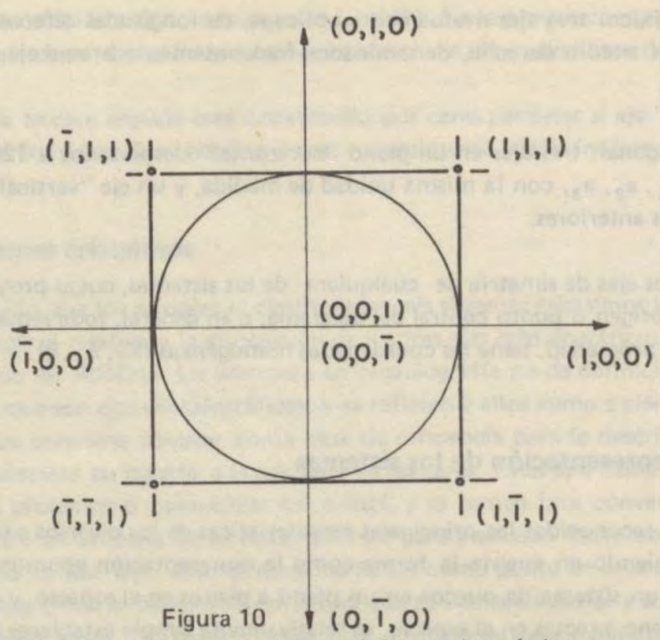


Figura 10

Gnomograma de los tres poliedros regulares del sistema isométrico

Los sólidos geométricos regulares que tipifican este sistema cristalino son: el cubo, el octaedro y el dodecaedro. El cubo, orientado según los tres ejes normales a sus caras, viene representado por el conjunto de polos[1] cuyos índices de Miller sean un "1" (positivo o negativo) y dos "ceros"; en consecuencia los polos así caracterizados (correspondientes a sendas caras) dan lugar a un punto propio (coincidente con el origen), doble (coincidencia de (0 0 1) y (0 0 $\bar{1}$)) y cuatro puntos impropios "coincidentes" con las cuatro direcciones de los ejes. El octaedro orientado según las diagonales de sus planos medios (cuadrados) —o ejes diagonales— da lugar a ocho ($2^3 = 8$) polos cuyos índices son ternas de "1", s (positivos o negativos); por tanto, ninguno está sobre alguno de los ejes y todos son puntos propios, dispuestos sobre los vértices de un cuadrado de lados paralelos a los ejes, circunscrito al círculo de proyección (ver figura). El dodecaedro, orientado según tres de sus diagonales ortogonales, dá lugar a 12 polos que quedan representados por cuatro puntos impropios (las cuatro direcciones dadas por las rectas que cortan los ejes del diagrama a 45º) y por 4 puntos propios dobles; como se vé, los índices de los polos de este sólido son todas las lunas[2] formadas por un "0" y dos "1"s (positivos o negativos).

La distancia entre dos polos P (hkl), Q(pqr), en el diagrama, se calcula fácilmente, a partir de sus respectivos índices. En efecto, siendo π_1, y π_2 los planos del cristal correspondientes a P y Q respectivamente, ya se mostró que sus ecuaciones respecto a la terna cartesiana en el espacio, en la forma normal o hessiana, son:

[1] Esos polos son en número de $6 = 2 \times 3$.

[2] Estos polos son en número de $12 = 2^3 \times 3/2$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - p_1 &= 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y - \gamma_2 z - p_2 &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad p_i > 0$$

siendo α_i, β_i, γ_i, p_i los cosenos direccionales y la longitud de la perpendicular $0I_i$: bajada de 0 a π_i. El vector $0I_i$ puede escribirse entonces

$$\vec{0I_i} = p_i\,(\alpha_i \vec{i} + \beta_i \vec{j} + \gamma_i \vec{k})$$

siendo $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ los vectores unitarios de los ejes cartesianos en el espacio. Así:

$$\vec{0I_1} = p_1\,(\alpha_1 \vec{i} + \beta_1 \vec{j} + \gamma_1 \vec{k})$$

$$\vec{0I_2} = p_2\,(\alpha_2 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \gamma_2 \vec{k})$$

Llamando θ el ángulo comprendido entre $\vec{0I_1}$ y $\vec{0I_2}$, el producto escalar de estos dos vectores es $(\vec{0I_1} \cdot \vec{0I_2}) = p_1 p_2 \cos\theta$:

$$p_1 p_2 \cos\theta = p_1 \alpha_1 p_2 \alpha_2 + p_1 \beta_1 p_2 \beta_2 + p_1 \gamma_1 p_2 \gamma_2$$

$$\cos\theta = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2$$

Teniendo en cuenta la conocida identidad

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1,$$

puede ponerse

$$\cos\theta = \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}\ \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}$$

Ahora bien, ya sabemos que

$$\begin{Bmatrix} h \\ k \\ l \end{Bmatrix} = \lambda_1 \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} = \lambda_2 \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix}$$

proporcionalidades que, substituídas en la igualdad anterior, dan

$$\cos\theta = \frac{hp + kq + lr}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}\ \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

Nótese que esta deducción es idéntica a la dada más atrás al calcular el ángulo

interfacil entre π_1, π_2, teniendo en cuenta que los módulos de escala para los tres ejes son iguales.

B. **Tetragonal.** La representación gnomónica de este sistema se obtiene haciendo coincidir los tres ejes principales del cristal con tres ejes ortogonales en el espacio. Los ejes cristalinos se designan a, b (= a), c, y éste último se hace coincidir en dirección con la normal al plano del diagrama. Los ejes cartesianos de éste último serán paralelos a los ejes cristalinos a, b.

Estos diagramas tiene un centro de simetría de 4o. orden en el punto 0 (0,0), y cuatro rectas de simetría binaria: las rectas h = 0, k = 0, h = k, h = − k, es decir, aquellas cuyas coordenadas homogéneas son (1,0,0), (0,1,0), (1,1,0), (1,−1,0).

Cuerpos estereométricos que son típicos de este sistema, son el prisma y la doble pirámide de base cuadrada y los de base octogonal regular.

Adoptando para el trazado del nomograma la longitud común (a) de los ejes transversales iguales y siendo c el eje vertical ($c \neq a = b$), los módulos para los ejes 0X, 0Y del diagrama, son $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, y el módulo para el eje vertical 0Z es $m_3 = 1/c$. De tal manera resulta que el ángulo entre dos caras P(h,k,l), Q (p,q,r) es ϕ :

$$\cos\phi = \frac{hpc^2 + kqc^2 + lr}{\sqrt{(h^2 + k^2)c^2 + l^2}\ \sqrt{(p^2 + q^2)c^2 + r^2}}$$

N. de la D. Invitamos a los lectores a discutir este artículo. Se reciben comentarios hasta Septiembre 30/77.