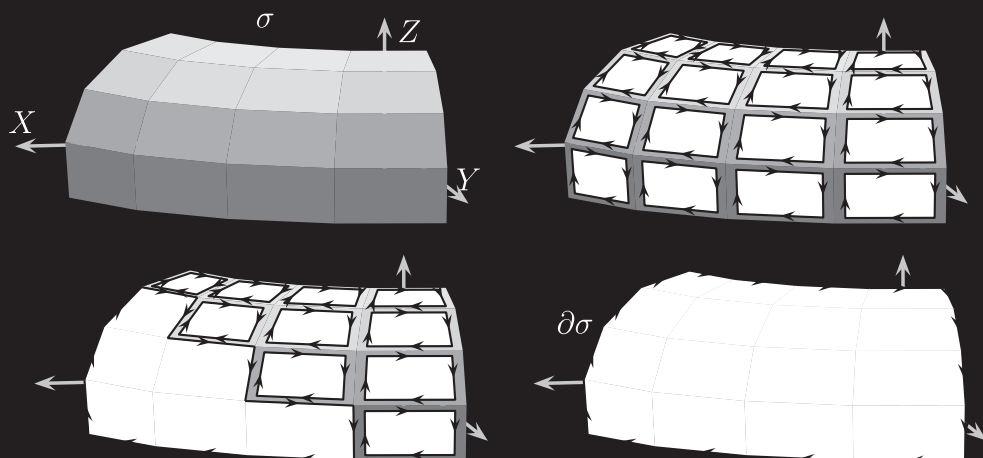


# DOCE LECCIONES DE CÁLCULO VECTORIAL

*Bernarda Aldana Gómez • Ernesto Acosta Gempeler*



ACADEMIA COLOMBIANA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES  
COLECCIÓN JULIO CARRIZOSA VALENZUELA No. 17

ACADEMIA COLOMBIANA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES  
COLECCIÓN JULIO CARRIZOSA VALENZUELA No. 17



## DOCE LECCIONES DE CÁLCULO VECTORIAL

Ernesto Acosta Gempeler  
Bernarda Aldana Gómez

Escuela Colombiana de Ingeniería  
Julio Garavito

Bogotá, D.C., 2020

**Catalogación en la publicación Academia  
Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales**

Ernesto Acosta Gempeler, Bernarda Aldana Gómez. Doce lecciones de cálculo vectorial.  
Bogotá: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 2020.

206 p. il (Colección Julio Carrizosa Valenzuela No. 17)

ISBN: 978-958-9205-99-0

**Tema:** Matemáticas

**Subtema:** Cálculo y análisis matemático

**Palabras clave:** parametrización, curvas, superficies, sólidos, funciones, derivadas, integrales, campos vectoriales, circulación, flujo, divergencia, rotacional, Teorema de Stokes.

**Doce lecciones de cálculo vectorial**

- © Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales  
Carrera 28A No. 39A-63, Teléfono 5550470, Bogotá, D.C. Colombia  
2020
- © Ernesto Acosta Gempeler  
Bernarda Aldana Gómez  
2020

**Diseño y composición:**  
Santiago Acosta Arreaza

**Impresión:**  
Editorial Gente Nueva  
Pbx: 320 21 88



**MINEDUCACIÓN**



**GOBIERNO  
DE COLOMBIA**

Esta Publicación se ha financiado mediante la transferencia de  
recursos del Gobierno Nacional a la Academia Colombiana de Ciencias  
Exactas, Físicas y Naturales

El Ministerio de Educación Nacional no es responsable de las  
opiniones aquí expresadas

*Derechos reservados. Este libro o partes del mismo no pueden ser reproducidos sin la autorización de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y de los autores.*

Es ya tradicional en el currículo de las carreras de ingeniería la inclusión de una asignatura de Cálculo Vectorial, que se cursa después del cálculo diferencial e integral de una variable y antes de las ecuaciones diferenciales. Se ha vuelto también común la utilización de textos de apoyo estadounidenses traducidos al español, el último de los cuales, que se utiliza a la actualidad en la Escuela colombiana de ingeniería Julio Garavito, es el de James Stewart (Cengage, 2017, México).

Todos estos textos, sin excepción, siguen la misma pauta: muchas figuras de gran claridad e interés, ejecutadas con ayuda de algún programa de computador; muchos ejercicios de aplicación de fórmulas, demasiados detalles cuya necesidad está lejos de ser evidente, en detrimento de un tratamiento unificado que destaque los principios fundamentales, que se limite a lo esencial y que, además, pueda cubrirse sin afanes ni carreras en un semestre.

Hace algunos años, Bernarda Aldana Gómez y Ernesto Acosta Gempeler, profesores de la Escuela colombiana de ingeniería Julio Garavito y distinguidos miembros de la comunidad matemática colombiana, tuvieron la idea de redactar unas lecciones de cálculo vectorial para ser utilizadas en los cursos de la Escuela. El experimento duró varios semestres y comenzaba a dar sus frutos, pero finalmente fue descartado y se volvió a los textos tradicionales ya mencionados.

Al evaluar mi experiencia de ese entonces, manifestaba yo la esperanza de que las lecciones de Acosta y Aldana se decantaran y condujeran a la publicación de un texto que seguramente sería muy bien recibido. Pues bien: el libro está aquí, listo para publicación.

Desde la primera lección, sobre vectores en el plano y en el espacio, el carácter

y objetivo de los autores queda establecido de una vez por todas: se presenta lo esencial en el texto, y los desarrollos adicionales y aplicaciones se remiten a los ejercicios; algunos de estos están diseñados para repasar nociones ya vistas en cursos anteriores y otros introducen aspectos nuevos. En esta lección, por ejemplo, todo lo referente a la distancia de puntos a rectas y planos en el espacio, lo mismo que la distancia entre rectas que no se cortan ni son paralelas o entre planos paralelos, se deja para los ejercicios.

En la lección siguiente, sobre superficies en el espacio, además de presentar la ecuación general de una superficie cuádrica y mencionar la escogencia de un sistema de coordenadas adecuado para reducirla a sus formas estándar, se introducen los dos sistemas alternos comunes de coordenadas espaciales (esféricas y cilíndricas), independientemente del sistema cartesiano, lo cual conduce de inmediato, en los ejercicios, a la representación algebraica de lugares geométricos mediante la escogencia del sistema de coordenadas apropiado y, recíprocamente, a la representación geométrica de una ecuación algebraica escrita en coordenadas diferentes de las cartesianas.

En la lección dedicada a las funciones vectoriales, Aldana y Acosta introducen de una vez, además del tratamiento y la parametrización usual de las curvas en el espacio, la parametrización de superficies y sólidos, herramienta que se convertirá posteriormente en el núcleo del resto de las lecciones y que “mata varios pájaros de un tiro”, al decir de los autores (¡mucho cuidado con los ecologistas, ambientalistas y animalistas radicales contemporáneos, y con las afirmaciones políticamente incorrectas!), objetivo que efectivamente se pone de manifiesto en la lección que trata de las integrales múltiples, en la cual la parametrización muestra todo su poder.

Volviendo a las funciones vectoriales de una variable, luego de presentar los vectores unitarios tangencial, normal y binormal, como es lo corriente, proponen, en los ejercicios, la definición de las curvaturas gaussiana y normal para una superficie, y algunos ejemplos que debe calcular el lector. Estas cantidades no figuran en los textos usuales.

En la lección dedicada a las funciones de varias variables se incluye la noción de vecindad, que permite caracterizar el dominio de funciones de dos y tres variables, asunto que no aparece por lo general, o que se menciona de pasada, en los textos mencionados atrás. La definición de límite, fundamentada en la adopción de un acercamiento general al punto en que se quiere calcular el límite de la función, y en el teorema de la compresión, es mucho más sencilla de comprender, para el estudiante promedio, que la presentada habitualmente, con las cantidades  $\delta$  y  $\epsilon$ ; permite, además, extender de manera inmediata y sencilla las propiedades de los límites de funciones de una variable a las funciones de varias variables. En los ejercicios de esta sección se presenta la advertencia

---

de Thomas[2]<sup>1</sup>, relativa a los peligros que encierra la aplicación mecánica de la transformación a coordenadas polares para calcular límites de funciones de dos variables, con un ejemplo del resultado falso que se obtiene en ciertos casos, cuando no se toman las precauciones necesarias. En ninguno de los textos de este nivel que conozco se menciona este importante asunto: resulta entonces oportuna la mención que de él hacen los autores.

Otro enfoque novedoso es la introducción de la derivada direccional en general, con la noción previa del paso por un punto, de la cual se deducen inmediatamente las propiedades de esta derivada y, sin dificultad ninguna, las derivadas parciales de primer orden, lo que permite ahorrar tiempo y esfuerzo que se pueden dedicar con ventaja evidente a la función afín y a la noción de diferenciabilidad, temas estos que suelen ser difíciles para el lector promedio.

La lección 7, que trata de los extremos de funciones de varias variables, trae en los ejercicios la versión del algoritmo de Newton para resolver un sistema de dos ecuaciones generales con dos incógnitas, asunto que no figura en ninguno de los textos conocidos de nivel similar.

En las dos lecciones dedicadas a las integrales múltiples, y gracias a la parametrización previa de curvas, superficies y sólidos, la integración aparece como una operación única, que puede realizarse sobre curvas, superficies o volúmenes en el espacio.

La parametrización induce automáticamente los elementos de línea, de superficie o de volumen, que luego se utilizarán en las integrales de línea, de superficie o de volumen. Así, por ejemplo, en algún ejercicio de la lección 8 se pide plantear integrales de una función sencilla sobre curvas, superficies o sólidos cuya parametrización se ha obtenido en ejercicios anteriores, de modo que el estudiante se familiariza de una vez con la operación en todas sus modalidades. La aplicación más socorrida, la del cálculo de centros de masa, se puede así dejar para los ejercicios, lo que a su vez permite el repaso de los conceptos básicos y las técnicas de integración. La aparición, en uno de los ejercicios, del método de Montecarlo para aproximar una integral doble sencilla, constituye una primicia para un libro de este nivel.

A pesar de que mencionan el significado geométrico del determinante jacobiano, es lástima que los autores no hayan incluido una demostración del teorema del cambio de variable en el caso de las integrales múltiples.

Ya en el tema de los campos vectoriales, al estudiar la interacción de campos bidimensionales con curvas, se presentan las nociones de densidad de circu-

---

<sup>1</sup>George B. Thomas Jr., célebre matemático estadounidense cuyo texto "Calculus and Analytic Geometry" fue, en su tercera edición en inglés, el texto guía para los estudiantes de ingeniería de la Universidad Nacional ¡hace unos sesenta años! Los autores citan la decimosegunda edición en español de 2010.

lación y densidad de flujo, por medio de las cuales se puede aterrizar suavemente, sin mayores traumatismos, en los conceptos de circulación y flujo; con la introducción del campo dual se ve claramente la relación entre ambos.

Algo análogo se puede decir de la densidad rotacional y la densidad de expansión, que se convierten más adelante, al hablar de los campos tridimensionales, en las familiares nociones del rotacional y la divergencia.

Con los conceptos y recursos necesarios tratados con anterioridad, los autores pasan a demostrar los teoremas de Stokes y de la divergencia, que aparecen como la culminación y objetivo final de las lecciones. El teorema de Green, que en los textos comunes tiene derecho a un capítulo aparte, aquí hace presencia como un caso particular del teorema de Stokes.

Es indudable que la adopción de la técnica de parametrización como hilo conductor da al libro una unidad y coherencia que no se aprecia en otros manuales de cálculo vectorial. Además, la técnica en cuestión permite abordar rápidamente los tópicos esenciales, evitando los detalles innumerables que ahogan la presentación en otros textos de apoyo.

Algunos extrañaron en las lecciones preliminares escritas por Aldana y Acosta la ausencia casi total de figuras. En ese entonces opiné que tal cosa no me parecía un defecto sino, por el contrario, una virtud: la proliferación de figuras, tan claras y correctas como la tecnología actual es capaz de ofrecer, coarta la imaginación y la capacidad de abstracción del estudiante. Sea de ello lo que fuere, tal carencia ha sido superada con creces en el manuscrito actual: las gráficas incluidas son pertinentes e ilustran y complementan la teoría.

Este libro será sin duda de gran utilidad para los docentes y estudiantes interesados, y servirá como referencia para los profesionales que lo requieran. Sus virtudes son muchas: la síntesis y concisión de los desarrollos, la redacción clara y precisa, las gráficas ilustrativas, el gran número de ejercicios y, finalmente, pero no por ello menos importante, la gran vocación pedagógica que sus autores ponen de manifiesto.

Eduardo Brieve Bustillo  
Profesor honorario y emérito  
Universidad Nacional de Colombia  
Catedrático  
Escuela colombiana de ingeniería Julio G  
*Abril de 2019*

---

## Introducción

---

El presente texto es el resultado de la reflexión de los autores, acerca de la enseñanza y el aprendizaje del curso de cálculo vectorial para estudiantes de ingeniería, realizada por más de 10 años en la Escuela Colombiana de ingeniería. Inicialmente se trabajó cada uno de los capítulos como notas de clase para el curso en el marco de una propuesta metodológica diferente en la cual se priorizó la comprensión profunda de los conceptos sobre el desarrollo de habilidades para resolver ejercicios tipo.

Nuestra propuesta en este texto es estudiar las funciones definidas de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  para  $n = 1, 2, 3$  y  $m = 1, 2, 3$  y algunas aplicaciones de la diferenciabilidad e integración de estas funciones a la física, mediante la parametrización de diferentes objetos geométricos en el espacio: curvas, superficies y sólidos. Consideramos que esta forma de abordar el curso le permite al estudiante acceder de manera más concreta a la temática del curso.

El contenido se desarrolla en 12 lecciones, cada una de las cuales se puede cubrir completamente en una semana de clase. Los ejercicios propuestos en cada lección permiten ejemplificar la teoría y desarrollar habilidad en hacer cálculos a partir del análisis de las situaciones y el entendimiento del manejo y uso de las herramientas. Es por esto que evitamos la presentación de ejemplos que pudieran ser utilizados como protocolos para hacer determinado tipo de ejercicios.

En la primera lección se hace un recuento de los sistemas de coordenadas rectangulares para el plano y el espacio, de los vectores geométrico y de las representaciones de algunos lugares geométricos, rectas y planos, mediante ecuaciones. En la segunda lección se introducen los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas para el espacio, haciendo especial énfasis en el manejo



de cada sistema por separado, no en el paso de un sistema a otro, así como en la representación de lugares geométricos mediante ecuaciones e inecuaciones en cada sistema. En la tercera lección se estudian las funciones vectoriales definidas de  $k$ -celdas en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  para  $k = 1, 2, 3$ , haciendo especial énfasis en el caso de 1-celdas y el uso de estas funciones para modelar el movimiento en el espacio. Posteriormente, considerando estas funciones como parametrizaciones de curvas, se llega a la parametrización de superficies y sólidos para, desde esta perspectiva, adentrarse al estudio de la geometría de curvas y superficies.

En las lecciones 4 a 7 se estudian los campos escalares: funciones definidas de un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ , centrando el estudio en los casos de  $n = 2$  y  $n = 3$ . Se inicia en la lección 4 con una caracterización topológica de los dominios de estas funciones. Luego se aborda el concepto de límite desde una generalización del concepto de límite lateral de las funciones de una variable real. Esta generalización se hace por medio de lo que denominamos *acercamiento* a un punto, perspectiva que nos permite abordar el concepto utilizando todas las herramientas desarrolladas para las funciones de una variable. Continuamos en la lección 5 con la misma estrategia, definiendo el *paso* por un punto en una dirección y a partir de lo cual, se define la derivada direccional, para terminar con un estudio detallado de la diferenciabilidad. En la lección 6, desde la misma óptica se estudia la regla de la cadena, dando sentido al vector gradiente de funciones diferenciables. En la lección 7 se desarrolla el tema de valores extremos de funciones, involucrando el concepto de paso por un punto para poder dar sentido y deducir el criterio utilizado para las funciones de dos variables y a la técnica de Multiplicadores de Lagrange.

En las lecciones 8 y 9 se aborda el concepto de integral de funciones escalares sobre curvas, superficies y sólidos, comenzando por la definición de las sumas de Riemann sobre 1-celdas, 2-celdas y 3-celdas, pasando a integrales iteradas y luego, usando parametrizaciones para definir las integrales sobre dominios más generales, logramos presentar la integral de manera unificada y con un enfoque geométrico.

En las lecciones 10 y 11 se introducen los campos vectoriales bidimensionales y tridimensionales y algunos de los conceptos más importantes, desde el punto de vista físico, que darán sentido a los Teoremas Fundamentales, como son *flujo*, *circulación*, *densidad rotacional*, *densidad de expansión* y *campos gradiente*. La circulación de un campo a lo largo de una curva es fundamental para definir los conceptos de *superficies cerradas*, *superficies con borde* y *borde de una superficie*. De la misma forma en que se definió este último, definimos *superficie (o borde) de un sólido*. En estas mismas secciones, se definen los elementos de integración vectoriales de longitud, área y volumen para termi-

nar con la integración de campos vectoriales sobre curvas, superficies y sólidos y los Teoremas fundamentales: Green, Stokes y Divergencia, planteados en términos de la medición de la expansión y la rotación.

Por último, en la lección 12 se demuestran los Teoremas Fundamentales de una forma muy geométrica, entendible para un estudiante de ingeniería.

Agradecemos a los profesores de la Escuela Colombiana de Ingeniería que participaron en la propuesta metodológica del curso de cálculo vectorial de la que surgió este texto. Especialmente queremos agradecer a los profesores Oscar Pulido, Boris Pulido, Eduardo Brieva, Nicolás Espitia, Leonardo Gutiérrez y Richar Riaño quienes hicieron aportes, tanto de contenido, como de ejercicios. Al estudiante Carlos Antonio Pinzón quien realizó algunos aportes teóricos importantes. El profesor Richar Riaño escribió la demostración del Teorema del Cambio de Variable que hemos incluido en el Apéndice.

Todas las gráficas del texto son creaciones originales de Santiago Acosta A-reaza quien, usando su talento para comprender y manipular los paquetes gráficos de  $\text{\LaTeX}$ , logró plasmar en las imágenes los conceptos más relevantes de la teoría, lo que requirió un esfuerzo y una dedicación invaluable.



---

## Contenido

---

|  |     |
|--|-----|
| Prólogo  | vii |
| Introducción   | x   |
| 1 Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$        | 1   |
| 2 Ecuaciones de superficies en el espacio            | 19  |
| 3 Funciones vectoriales y parametrización            | 37  |
| 4 Funciones de varias variables                      | 63  |
| 5 Diferenciabilidad de funciones de varias variables | 79  |
| 6 Regla de la cadena                                 | 97  |
| 7 Valores extremos de funciones                      | 109 |
| 8 Integrales múltiples                               | 121 |
| 9 Integrales múltiples                               | 141 |
| 10 Campos vectoriales                                | 149 |
| 11 Divergencia y rotacional                          | 165 |
| 12 Teoremas Fundamentales                            | 181 |
| Apéndice: Teorema del cambio de variable             | 187 |



# LECCIÓN 1

---

## Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

---

Hacemos un recuento muy rápido de los conceptos fundamentales de coordenadas de puntos en el plano y en el espacio y de vectores bidimensionales y tridimensionales, así como de las operaciones entre vectores.

Para localizar puntos en el plano, se introducen dos ejes numéricos perpendiculares entre sí, cuyo punto  $O$  de intersección es el origen de los ejes numéricos, es decir, el punto con coordenada cero en cada eje numérico. A uno de estos ejes lo designamos eje  $X$  y al otro eje  $Y$ . Estos dos ejes numéricos definen en el plano un *sistema de coordenadas cartesianas rectangulares*.

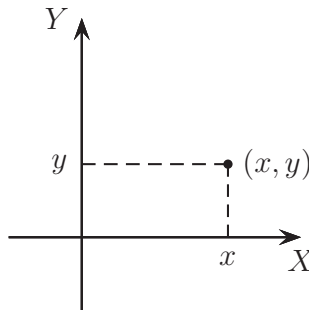


Figura 1.1

Las coordenadas  $(x, y)$  de un punto  $P$  en el plano se obtienen proyectándolo ortogonalmente sobre los ejes  $X$  y  $Y$ , siendo  $x$  la coordenada de la proyección sobre el eje  $X$  y  $y$  la coordenada de la proyección sobre el eje  $Y$ . La notación

$P(x, y)$  significa el punto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$ . De esta manera, a cada punto del plano se le asigna una única pareja de números reales

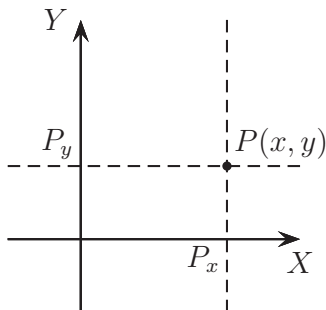


Figura 1.2

Ahora, dada una pareja de números reales  $(x, y)$ , se ubica en el eje  $X$  el punto  $P_x$  de coordenada  $x$  y en el eje  $Y$  el punto  $P_y$  de coordenada  $y$ . La recta perpendicular al eje  $X$  que contiene al punto  $P_x$  y la recta perpendicular al eje  $Y$  que contiene al punto  $P_y$  se intersectan en un punto  $P$  del plano. Este punto tiene coordenadas  $(x, y)$ , ya que las proyecciones de  $P$  sobre los ejes numéricos  $X$  y  $Y$  son los puntos  $P_x$  y  $P_y$  con coordenadas  $x$  y  $y$  respectivamente. De esta manera, a cada pareja de números reales se le hace corresponder un único punto del plano.

El mismo procedimiento se puede emplear para introducir un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares en el espacio tridimensional. En este caso se consideran tres ejes numéricos  $X, Y, Z$ , perpendiculares entre sí que se intersectan en el punto  $O$ , que es el origen de cada uno de ellos. Las coordenadas  $(x, y, z)$  de un punto  $P$  en el espacio, se obtienen con el mismo procedimiento.

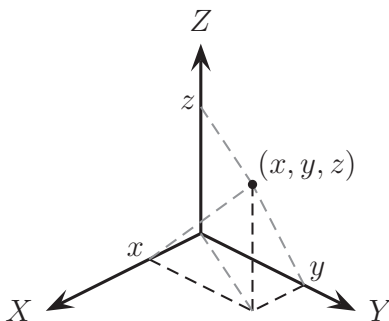


Figura 1.3

Dos puntos diferentes  $P$  y  $Q$  definen los *segmentos de recta dirigidos*  $\mathbf{PQ}$  y  $\mathbf{QP}$ . Estos dos segmentos de recta tienen la misma dirección y la misma longitud y se diferencian por su orientación. Es decir, el segmento dirigido  $\mathbf{PQ}$  se supone recorrido desde  $P$  hasta  $Q$ , y el segmento dirigido  $\mathbf{QP}$  se supone recorrido desde  $Q$  hasta  $P$ .

Si introducimos un sistema de coordenadas en el espacio y  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  son las coordenadas de  $P$  y  $Q$ , respectivamente, los tres números  $x_2 - x_1$ ,  $y_2 - y_1$  y  $z_2 - z_1$ , son las *componentes escalares* del segmento dirigido  $\mathbf{PQ}$ . Obsérvese que cada una de las componentes del segmento dirigido  $\mathbf{QP}$  es el opuesto de la componente correspondiente del segmento dirigido  $\mathbf{PQ}$ . Dos segmentos dirigidos son equivalentes si sus componentes escalares correspondientes son iguales. No es difícil mostrar que si  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  son cuatro puntos no colineales, los segmentos dirigidos  $\mathbf{PQ}$  y  $\mathbf{RS}$  son equivalentes si y solamente si el cuadrilátero  $PQSR$  es un paralelogramo.

La igualdad de las componentes escalares correspondientes entre segmentos dirigidos es una relación de equivalencia y cada clase de equivalencia es un *vector geométrico*. Es decir, un vector (en este caso tridimensional) está representado por un segmento dirigido  $\mathbf{PQ}$ , o por cualquier otro segmento dirigido equivalente. Así, un vector está completamente determinado por las componentes escalares de cualquier segmento dirigido que lo representa. Se usa frecuentemente la notación  $\langle a, b, c \rangle$  para denotar el vector con componentes escalares  $a$ ,  $b$  y  $c$  y para notar los vectores las letras con tipo negrita, por ejemplo,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , etc. En adelante para decir que el vector  $\mathbf{v}$  tiene componentes escalares  $\langle x, y, z \rangle$ , escribiremos  $\mathbf{v} = \langle x, y, z \rangle$ .

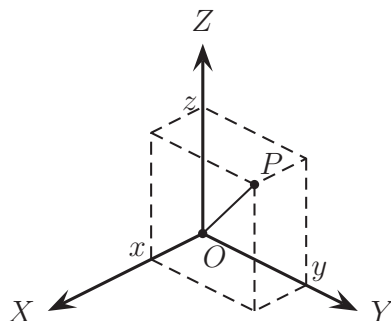


Figura 1.4

Sea  $\mathbf{v}$  el vector representado por el segmento dirigido  $\mathbf{OP}$ , donde  $O$  es el origen del sistema de coordenadas cartesianas. Si  $(x, y, z)$  son las coordenadas



del punto  $P$ , entonces  $\langle x, y, z \rangle$  son las componentes escalares del vector  $\mathbf{v}$ , ya que las coordenadas del punto  $O$  son  $(0, 0, 0)$ .

El punto  $P$  define un paralelepípedo rectangular de caras paralelas a los planos coordenados, donde una de sus diagonales es el segmento  $\mathbf{OP}$ . Las dimensiones de esta caja rectangular son  $|x|$ ,  $|y|$  y  $|z|$  y por consiguiente la longitud del segmento  $OP$  es  $|\mathbf{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Este último número representa además la magnitud  $\|\mathbf{v}\|$  del vector  $\mathbf{v}$  y la distancia  $d(O, P)$  del punto  $O$  al punto  $P$ . Ahora bien, si el vector  $\mathbf{v}$  está representado por el segmento dirigido  $\mathbf{RS}$ , siendo  $R(x_1, y_1, z_1)$  y  $S(x_2, y_2, z_2)$ , entonces el vector  $\mathbf{v}$  tendrá componentes escalares  $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$  y en consecuencia su magnitud, o norma, será

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (1.1)$$

este número representa también la *longitud*  $|\mathbf{RS}|$  del segmento  $\mathbf{RS}$  y la *distancia*  $d(R, S)$  entre los puntos  $R$  y  $S$ .

Usando las componentes escalares de los vectores se definen las operaciones de *adición*, *producto escalar* y *producto vectorial* de vectores, así como multiplicación por escalar de la siguiente manera: Sean  $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$  y  $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$  dos vectores tridimensionales y  $a$  un número real. La suma de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  es

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3 \rangle, \quad (1.2)$$

el producto escalar de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3, \quad (1.3)$$

el producto vectorial de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  es

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left\langle \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right\rangle \quad (1.4)$$

y la multiplicación del escalar  $a$  por el vector  $\mathbf{u}$  es

$$a\mathbf{u} = \langle au_1, au_2, au_3 \rangle. \quad (1.5)$$

Estas operaciones tienen propiedades bien conocidas, que se deducen de las de la adición y multiplicación de los números reales, que son las que las definen. Por ejemplo, es claro que la adición de vectores es asociativa, conmutativa, que hay un elemento neutro (vector nulo) y que cada vector tiene su opuesto. Entre otras propiedades se tiene que la multiplicación por escalar distribuye sobre la adición de vectores, el producto escalar de vectores es conmutativo

y distribuye sobre la adición de vectores. Sin embargo, aunque el producto vectorial distribuye sobre la adición de vectores, éste no es conmutativo.

Dividir un vector por un escalar no nulo consiste en multiplicar el vector por el inverso multiplicativo de dicho escalar. Por ejemplo, podemos dividir a un vector no nulo por su magnitud para obtener un vector de magnitud 1, con la misma dirección y sentido. Los vectores de longitud 1 se denominan *vectores unitarios*. En  $\mathbb{R}^3$ , los vectores  $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ ,  $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$  y  $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$  son vectores unitarios y se denominan *vectores canónicos*.

El producto vectorial de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  se puede escribir como combinación lineal de  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

y por lo tanto, podemos recordar su cálculo mediante un determinante:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \quad (1.6)$$

Se puede verificar fácilmente que, tanto el producto vectorial, como la multiplicación por escalar y el producto escalar, distribuyen sobre la adición de vectores. Además, es fácil comprobar que  $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ .

Cuando calculamos la norma de la diferencia de dos vectores usando el teorema del coseno, encontramos una expresión del producto escalar que no depende de coordenadas. En efecto,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 &= (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \|\mathbf{u}\|^2 \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\|\cos\theta + \|\mathbf{u}\|^2 \end{aligned}$$

y por consiguiente

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos\theta \quad (1.7)$$

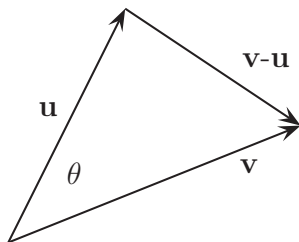


Figura 1.5

donde  $\theta$  es el menor ángulo formado por los dos vectores. De aquí podemos deducir que si  $\theta = \pi/2$  se tiene que  $\cos \theta = 0$  y por consiguiente  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ , y que si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores no nulos y  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  entonces  $\theta = \pi/2$ . Es decir, dos vectores no nulos son *ortogonales* si y sólo si su producto escalar es cero.

Al proyectar ortogonalmente el vector  $\mathbf{u}$  sobre el vector  $\mathbf{v}$  se obtiene un vector denominado el *vector proyección*, este vector tiene la misma dirección del vector  $\mathbf{v}$ , su magnitud es  $\|\mathbf{u}\| \cos \theta$  y el sentido depende del ángulo  $\theta$ , si  $0 < \theta < \pi/2$  tiene el mismo sentido de  $\mathbf{v}$  y si  $\pi/2 < \theta < \pi$  tiene el sentido opuesto. Así el vector proyección de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$  es

$$\text{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\| \cos \theta \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}, \quad (1.8)$$

y el escalar  $\|\mathbf{u}\| \cos \theta$  es la *componente escalar* de  $\mathbf{u}$  en la dirección de  $\mathbf{v}$ ,

$$\text{comp}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\| \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}. \quad (1.9)$$

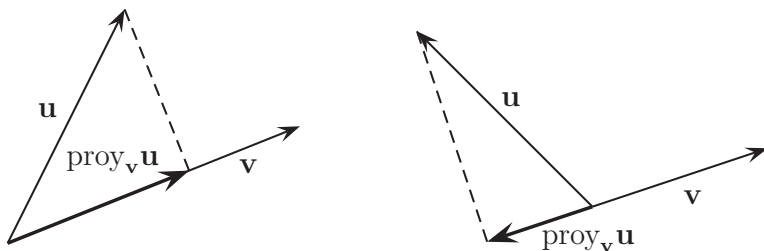


Figura 1.6

Otro hecho geométrico muy útil es el siguiente. Claramente el área del paralelogramo generado por los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  es  $\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , y es fácil mostrar que

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta, \quad (1.10)$$

de aquí se deduce que *dos vectores no nulos son paralelos si y sólo si su producto vectorial es el vector nulo*, que es el único vector cuya magnitud es cero.

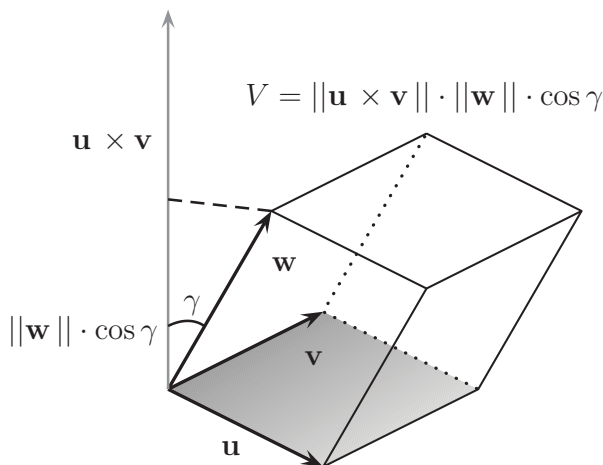


Figura 1.7

Además si recordamos que  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es ortogonal tanto a  $\mathbf{u}$  como a  $\mathbf{v}$  y que el volumen de un paralelepípedo es igual al área de la base multiplicada por la altura, podemos calcular el volumen del paralelepípedo generado por tres vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  como:

$$\begin{aligned} \pm \text{vol}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \gamma \\ &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \end{aligned} \quad (1.11)$$

siendo  $\gamma$  el ángulo entre  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ .

El papel más importante de los sistemas de coordenadas es que nos permiten escribir de manera algebraica las condiciones geométricas que definen conjuntos de puntos en el plano o en el espacio. Un *lugar geométrico de puntos* es un conjunto de puntos que está definido por una, o varias condiciones, por lo general de carácter geométrico. Las condiciones geométricas se traducen a relaciones entre las coordenadas de los puntos que las satisfacen y estas relaciones se escriben mediante ecuaciones o inecuaciones en dos o tres variables.

Por ejemplo, la recta que contiene un punto dado  $P$  y es paralela a un vector  $\mathbf{v}$  es el lugar geométrico de puntos  $Q$  tales que el segmento dirigido  $\mathbf{PQ}$  es paralelo a  $\mathbf{v}$ . En otras palabras, un punto  $Q$  está en esta recta si y sólo si su

vector posición es la suma de  $\mathbf{OP}$  y un múltiplo escalar de  $\mathbf{v}$ . Así, la recta que pasa por  $P$  y tiene vector director  $\mathbf{v}$  es el lugar geométrico de puntos  $Q$  tales que para algún número real  $t$  se tiene que

$$\mathbf{OQ} = \mathbf{OP} + t\mathbf{v}. \quad (1.12)$$

Si  $P$  tiene coordenadas  $(a, b, c)$  y  $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ , un punto  $Q$  de coordenadas  $(x, y, z)$  estará en la recta si, y sólo si, sus coordenadas satisfacen la ecuación

$$\langle x, y, z \rangle = \langle a, b, c \rangle + t \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \quad (1.13)$$

para algún número real  $t$ . Esta última es la *ecuación vectorial* de la recta que contiene a  $P$  y tiene vector director  $\mathbf{v}$ . Las *ecuaciones paramétricas* de esta recta son las tres ecuaciones que se obtienen de la igualdad de los dos vectores en la ecuación anterior

$$x = a + tv_1, \quad y = b + tv_2, \quad z = c + tv_3. \quad (1.14)$$

A partir de las ecuaciones paramétricas se pueden escribir las *ecuaciones simétricas* al establecer las relaciones que se obtienen entre las coordenadas de los puntos de la recta eliminando el parámetro. En el caso en que  $v_1, v_2$  y  $v_3$  son diferentes de cero, estas son

$$\frac{x - a}{v_1} = \frac{y - b}{v_2} = \frac{z - c}{v_3}. \quad (1.15)$$

En realidad, estas son tres ecuaciones (¿cuáles?) que corresponden a planos que contienen a la recta, cada uno de los cuales es paralelo a uno de los ejes coordenados.

## EJERCICIOS

- Para cada par de puntos  $P$  y  $Q$  determine las componentes escalares de los segmentos dirigidos  $\mathbf{PQ}$  y  $\mathbf{QP}$ .
  - $P(1, 2, 1)$  y  $Q(3, 1, 2)$ .
  - $P(-1, 3, 4)$  y  $Q(6, -4, 7)$ .
  - $P(2, 5)$  y  $Q(-1, 2)$ .
- En un plano cartesiano represente los puntos  $P(-3, -5)$  y  $Q(2, -1)$  y dibuje:
  - El segmento dirigido  $\mathbf{PQ}$ .
  - Un segmento dirigido equivalente a  $\mathbf{PQ}$  con punto inicial en el origen.
  - Un segmento dirigido equivalente a  $\mathbf{QP}$  con punto inicial en el origen.
  - Un segmento dirigido equivalente a  $\mathbf{PQ}$  con punto inicial en  $R(7, -2)$ .
- En cada numeral determine si los segmentos  $\mathbf{PQ}$  y  $\mathbf{RS}$  son equivalentes, justifique su respuesta.
  - $P(1, -1, 1)$ ,  $Q(2, -2, 2)$ ,  $R(2, 0, 1)$ ,  $S(3, -1, 2)$ .
  - $P(0, 0, 0)$ ,  $Q(1, 3, 2)$ ,  $R(1, 0, 1)$ ,  $S(2, 3, 4)$ .
- Dados los puntos  $P(-1, 3)$ ,  $Q(2, -1)$  y  $R(-6, 5)$ , determine todos los puntos  $S$  del plano tales que  $P, Q, R$  y  $S$  sean los vértices de un paralelogramo.
- Dados los puntos  $P(p_1, p_2, p_3)$ ,  $Q(q_1, q_2, q_3)$  y  $R(r_1, r_2, r_3)$ , determine todos los puntos  $S$  tales que  $P, Q, R$  y  $S$  sean los vértices de un paralelogramo.
- Muestre que la suma de vectores es conmutativa.
- Muestre que el producto escalar de dos vectores es conmutativo.
- Muestre que el producto vectorial no es conmutativo ni asociativo. ¿Qué relación existe entre los vectores  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  y  $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ ?
- Calcule la magnitud de cada uno de los siguientes vectores:
  - $\mathbf{v} = \langle 2, -1 \rangle$ .
  - $\mathbf{v} = \langle 2, -1, 0 \rangle$ .
  - $\mathbf{v} = \langle 3, 2, -2 \rangle$ .
  - $\mathbf{v} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ .
  - $\mathbf{v} = \langle 6, 4, -4 \rangle$ .

10. Sean  $\mathbf{v} = \langle -1, 5, -2 \rangle$  y  $\mathbf{w} = \langle 3, 1, 1 \rangle$ . Calcule

- (a)  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ .      (b)  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ .      (c)  $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ .      (d)  $\frac{1}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ .  
 (e)  $\frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{w})$ .      (f)  $-2\mathbf{v} + 4\mathbf{w}$ .      (g)  $\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ .

11. Abra la mano derecha, doble los dedos meñique y anular, ponga el dedo pulgar perpendicular al índice y al corazón. Así se ponen los dedos índice, corazón y pulgar (en ese orden), orientados de acuerdo con la *regla de la mano derecha*. Una terna de vectores  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  en  $\mathbb{R}^3$  está orientada de acuerdo con la regla de la mano derecha, si sus posiciones relativas están de acuerdo con las posiciones relativas de los dedos índice, corazón y pulgar de la mano derecha descritas anteriormente. Esta posición relativa de los vectores se define desde el punto de vista matemático de la siguiente manera: Una terna de vectores  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  en  $\mathbb{R}^3$  están orientados de acuerdo con la regla de la mano derecha si y sólo si  $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) > 0$ . Por ejemplo, la terna de vectores  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , representados en un sistema cartesiano dextrógiro, están orientados de acuerdo con la regla de la mano derecha porque  $\det(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = 1 > 0$ . Pero si intercambiamos el orden de  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  tenemos que  $\det(\mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{k}) = -1 < 0$  por lo tanto estos vectores no están orientados de acuerdo con la regla de la mano derecha, tendremos que cambiar a  $\mathbf{k}$  por  $-\mathbf{k}$ , para que la nueva terna esté orientada por la regla de la mano derecha, esto es  $\det(\mathbf{j}, \mathbf{i}, -\mathbf{k}) = 1 > 0$ .

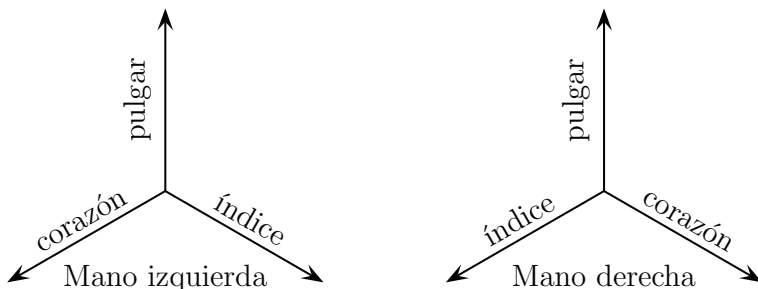


Figura 1.8

El producto vectorial de dos vectores también se define como un vector que es perpendicular a los dos vectores dados, que tiene la orientación dada por la regla de la mano derecha y cuya norma es el producto de las normas de los vectores y el seno del menor ángulo formado por ellos. Muestre que esta definición es equivalente a la dada en (1.4).

12. Dados el punto  $C(1, 2, 5)$ , determine las coordenadas de 3 puntos del

espacio tales que la distancia de cada uno de ellos al punto  $C$  sea 4 unidades. ¿Existen más puntos del espacio que cumplan la condición? ¿Existe un punto con primera coordenada 3 que cumpla la condición? ¿Existe un punto con primera componente 8 que cumpla la condición? ¿Cómo sabría usted si un punto de coordenadas  $(x, y, z)$  satisface la condición?

13. Dado el punto  $C(a, b, c)$ , determine las condiciones que deben satisfacer las coordenadas de todos los puntos  $S(x, y, z)$  del espacio para que  $\|\mathbf{CS}\| = 4$ . Describa el lugar geométrico de dichos puntos.
14. Dados los puntos  $P(3, -1, 4)$ ,  $Q(9, -2, 3)$ ,  $R(1, 4, 7)$ , determine 4 puntos tales que el vector  $\mathbf{PQ}$  sea paralelo al vector cuyo punto inicial es  $R$  y punto final el punto determinado. ¿Existe algún punto con primera coordenada 3 que cumpla la condición? ¿Existe algún punto con primera coordenada 20 que cumpla la condición? ¿Existe algún punto con primera coordenada 3 y segunda coordenada 5 que cumpla la condición? ¿Existen más puntos del espacio que cumplan la condición? ¿Cómo sabría usted si un punto de coordenadas  $(x, y, z)$  satisface la condición?
15. Dados 3 punto fijos  $P$ ,  $Q$  y  $R$ , describa el lugar geométrico de todos los puntos  $S$  del espacio tales que los vectores  $\mathbf{PQ}$  y  $\mathbf{RS}$  sean paralelos. Si  $P(x_1, y_1, z_1)$ ,  $Q(x_2, y_2, z_2)$ ,  $R(a, b, c)$ , determine las condiciones que deben satisfacer las coordenadas de todos los puntos  $S(x, y, z)$  del espacio para que los vectores  $\mathbf{PQ}$  y  $\mathbf{RS}$  sean paralelos.
16. Dados 3 punto fijos  $P$ ,  $Q$  y  $R$ , describa el lugar geométrico de todos los puntos  $S$  del espacio tales que los vectores  $\mathbf{PQ}$  y  $\mathbf{RS}$  sean perpendiculares. Si  $P(x_1, y_1, z_1)$ ,  $Q(x_2, y_2, z_2)$ ,  $R(a, b, c)$ , determine las condiciones que deben satisfacer las coordenadas de todos los puntos  $S(x, y, z)$  del espacio para que los vectores  $\mathbf{PQ}$  y  $\mathbf{RS}$  sean perpendiculares.
17. Calcule el área del paralelogramo generado por los vectores  $\mathbf{u} = \langle 2, 1, -1 \rangle$  y  $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 4 \rangle$ .
18. Calcule el área del paralelogramo que tiene tres de sus vértices en los puntos  $(0, 7, 4)$ ,  $(-2, 3, -6)$  y  $(1, -4, 5)$ .
19. Calcule el área del triángulo que tiene vértices en los puntos  $(0, 7, 4)$ ,  $(-2, 3, -6)$  y  $(1, -4, 5)$ .
20. Calcule el volumen del paralelepípedo generado por los vectores  $\mathbf{u} = \langle 2, 1, -1 \rangle$ ,  $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 4 \rangle$  y  $\mathbf{w} = \langle 1, 3, 2 \rangle$ .



21. ¿Cuántos paralelepípedos diferentes pueden tener cuatro de sus vértices en los puntos  $(1, 2, -1)$ ,  $(-5, 2, 2)$ ,  $(3, 1, 4)$  y  $(-1, 1, -3)$ ? Determine el volumen de por lo menos dos de ellos y justifique por qué se puede afirmar que todos tienen el mismo volumen. ¿Es alguno de estos paralelepípedos un paralelepípedo recto?

22. Sea  $\mathcal{P}$  el paralelepípedo sólido en  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}.$$

(a) Dibuje el paralelepípedo en un sistema de coordenadas cartesianas.

(b) Determine los cosenos de los ángulos formados por la diagonal principal de  $\mathcal{P}$  y cada una de sus aristas y encuentre una identidad que los relacione.

(c) Determine los ángulos entre la diagonal principal de  $\mathcal{P}$  y cada una de sus caras (¿Cómo se define el ángulo entre un vector y un plano?).

(d) Para cada una de las caras del paralelepípedo, determine el punto medio, tome el segmento dirigido que va del origen a dicho punto y determine el coseno del ángulo formado por la diagonal principal y el segmento dirigido.

(e) Si el paralelepípedo no fuera recto, ¿cómo determinaríamos los cosenos de los ángulos formados por cada una de las caras y la diagonal principal?

(f) ¿Cuántos paralelepípedos diferentes pueden tener la misma diagonal?

23. ¿En qué posición se encontrará un objeto si a partir del punto  $P(4, -7)$  se ha desplazado 7 unidades en la dirección del vector  $\langle -1, 3 \rangle$ ?

24. ¿En qué posición se encontrará un objeto si a partir del punto  $P(2, -6, 4)$  se ha desplazado 4 unidades en la dirección del vector  $\langle 2, -3, 6 \rangle$ ?

25. ¿Qué significa que los vectores  $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ ,  $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$  y  $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$  forman una base ortonormal del espacio de vectores tridimensionales? ¿Se puede escribir todo vector de  $\mathbb{R}^3$  como una combinación lineal de  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  únicamente? Justifique su respuesta.

26. Sean  $\mathbf{v} = \langle -1, 5, -2 \rangle$  y  $\mathbf{w} = \langle 3, 1, 1 \rangle$ .

(a) Determine el vector  $\mathbf{u}$  tal que  $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{i}$ .

- (b) Determine el vector  $\mathbf{u}$  tal que  $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .
- (c) ¿Existe un escalar  $m$  tal que  $m(\mathbf{v} + 2\mathbf{w}) = \mathbf{k}$ ? Justifique su respuesta.
27. Calcule  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ ,  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ , la componente escalar de  $\mathbf{v}$  en la dirección de  $\mathbf{w}$  y la proyección ortogonal de  $\mathbf{v}$  sobre  $\mathbf{w}$ , para cada uno de los pares de vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  siguientes:
- (a)  $\mathbf{v} = \langle 5, 1, -2 \rangle$ ,  $\mathbf{w} = \langle 4, -4, 3 \rangle$ . (b)  $\mathbf{v} = \langle -1, 2, 1 \rangle$ ,  $\mathbf{w} = \langle -3, 6, 3 \rangle$ .
- (c)  $\mathbf{v} = \langle 1, 3, 2 \rangle$ ,  $\mathbf{w} = \langle 7, 2, -10 \rangle$ . (d)  $\mathbf{v} = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ .
28. Para cada par de vectores determine el ángulo  $\theta$  formado por ellos:
- (a)  $\mathbf{v} = \langle 5, 1, -2 \rangle$ ,  $\mathbf{w} = \langle 4, -4, 3 \rangle$ . (b)  $\mathbf{v} = \langle 7, 2, -10 \rangle$ ,  $\mathbf{w} = \langle 2, 6, 4 \rangle$ .
- (c)  $\mathbf{v} = \langle 2, 1, 4 \rangle$ ,  $\mathbf{w} = \langle 1, -2, 0 \rangle$ . (d)  $\mathbf{v} = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ .
29. En cada numeral determine si  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son o no perpendiculares. Justifique su respuesta:
- (a)  $\mathbf{v} = \langle 8, 4, 3 \rangle$  y  $\mathbf{w} = \langle -2, 1, 4 \rangle$ .
- (b)  $\mathbf{v} = \langle 6, 0, 4 \rangle$  y  $\mathbf{w} = \langle 0, 2, -1 \rangle$ .
30. Para cada una de las siguientes afirmaciones, demuéstrela si es verdadera o dé un contraejemplo si es falsa:
- (a) Si  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ , entonces  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ .
- (b) Si  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$  para todo  $\mathbf{v}$ , entonces  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ .
- (c) Si  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$  para todo  $\mathbf{u}$ , entonces  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ .
- (d)  $\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$  para todo  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ .
- (e) Si  $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$  para todo  $\mathbf{w}$  en  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .
- (f) Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son unitarios, entonces  $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = 1$ .
31. Sean  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  los ángulos entre un vector no nulo  $\mathbf{v}$  en  $\mathbb{R}^3$  y los vectores  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ , y  $\mathbf{k}$ , respectivamente. Muestre que  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .  
(Nota:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  son los *ángulos directores* de  $\mathbf{v}$ , y  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  son los *cosenos directores* de  $\mathbf{v}$ .)
32. En cada numeral calcule  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$  y  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

- (a)  $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ ,  $\mathbf{v} = \langle 3, 0, 2 \rangle$ ,  $\mathbf{w} = \langle 2, 2, 2 \rangle$ .  
(b)  $\mathbf{u} = \langle 1, 0, 2 \rangle$ ,  $\mathbf{v} = \langle -1, 0, 3 \rangle$ ,  $\mathbf{w} = \langle 2, 0, -2 \rangle$ .
33. Calcule  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{z})$  si  $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ ,  $\mathbf{v} = \langle 3, 0, 2 \rangle$ ,  $\mathbf{w} = \langle 2, 2, 2 \rangle$ ,  $\mathbf{z} = \langle 2, 1, 4 \rangle$ .
34. Si  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son vectores unitarios en  $\mathbb{R}^3$ , ¿bajo que condiciones se tiene que  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  es también un vector unitario en  $\mathbb{R}^3$ ? Justifique su respuesta.
35. Demuestre que, para todo  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  en  $\mathbb{R}^3$  se tiene que:
- (a)  $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|^2 + |\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2$ .  
(b) Si  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$  y  $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$ , entonces  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  o  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ .  
(c) Los vectores  $\mathbf{u} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{w} + \|\mathbf{w}\| \mathbf{v}$  y  $\mathbf{z} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{w} - \|\mathbf{w}\| \mathbf{v}$  son ortogonales.  
(d) El vector  $\mathbf{u} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{w} + \|\mathbf{w}\| \mathbf{v}$  biseca al ángulo formado por los dos vectores.
36. Encuentre todas las soluciones de la ecuación vectorial  $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$  en  $\mathbb{R}^3$ , donde  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ .
37. Muestre que para todos los vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  en  $\mathbb{R}^3$ , se tiene que

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

38. Demuestre la *identidad de Jacobi*:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

39. Recuerde que tres vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son *linealmente dependientes* si existen escalares  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , no todos nulos, tales que

$$\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} + \gamma \mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Se dice que tres vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  están en un mismo plano si los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$ , que tienen respectivamente a  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  como vectores posición, son coplanares junto con el origen  $O$ . Demuestre que  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  están en un mismo plano si, y sólo si,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son linealmente dependientes.

40. Enuncie con precisión lo que significa que cuatro vectores están en un mismo plano. ¿Qué se puede decir en términos de dependencia lineal acerca de cuatro vectores que están en un mismo plano?

41. Muestre que  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  están en un mismo plano en  $\mathbb{R}^3$  si y solo si  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$ .

42. Muestre que para todos los vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{z}$  en  $\mathbb{R}^3$ ,

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{z} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}))\mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}))\mathbf{z}$$

y que

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{z}))\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{z}))\mathbf{u}$$

¿ Tienen significado geométrico estas propiedades?

43. Muestre que si  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{z}$  son vectores no nulos en  $\mathbb{R}^3$  que están en un mismo plano entonces  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) = \mathbf{0}$

44. ¿Es verdad que si  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{z}$  son vectores no nulos en  $\mathbb{R}^3$  y  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) = \mathbf{0}$  entonces están en el mismo plano? Justifique su respuesta.

45. Use vectores para demostrar que:

(a) Los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero son vértices de un paralelogramo.

(b) Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son los vértices de un triángulo,  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  son los puntos medios de los lados del triángulo y  $P$  es un punto exterior del triángulo entonces  $\mathbf{PA} + \mathbf{PB} + \mathbf{PC} = \mathbf{PA}' + \mathbf{PB}' + \mathbf{PC}'$ .

(c) Las diagonales de un rombo son perpendiculares.

46. Use vectores para demostrar la ley de los cosenos y la ley de los senos.

47. Determine el trabajo realizado por la fuerza  $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  al mover un objeto a lo largo del segmento dirigido  $\mathbf{OP} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + e\mathbf{k}$

48. ¿Cuáles son los subespacios vectoriales propios de  $\mathbb{R}^2$ ? ¿Cuáles son los de  $\mathbb{R}^3$ ?

**Nota.** No siempre somos conscientes de la *dualidad* presente en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ . Hay que tener en cuenta que algunas veces  $\mathbb{R}^3$  es el conjunto de puntos del espacio y algunas veces es el espacio vectorial de vectores tridimensionales. Esta dualidad evoca el problema de doble personalidad planteado en el libro *El extraño caso del Dr. Jekyll y Mr. Hyde* del escritor inglés Robert Louis Stevenson.

49. Encuentre la matriz asociada a la transformación lineal de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$ , que corresponde a la reflexión con respecto al plano de ecuación  $x = y$ . Encuentre la que corresponde a la reflexión con respecto al plano de ecuación  $ax + by + cz = 0$ . ¿Es la reflexión con respecto al plano de ecuación  $ax + by + cz = d$ ,  $d \neq 0$ , una transformación lineal de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$ ? Recuerde a Dr. Jekyll y a Mr. Hyde.
50. En cada numeral escriba la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas de la recta  $L$  que contiene el punto  $P$  y es paralela al vector  $\mathbf{v}$ :
- (a)  $P(2, 3, -2)$ ,  $\mathbf{v} = \langle 5, 4, -3 \rangle$
  - (b)  $P(3, -1, 2)$ ,  $\mathbf{v} = \langle 2, 8, 1 \rangle$
  - (c)  $P(2, 1, 3)$ ,  $\mathbf{v} = \langle 1, 0, 1 \rangle$
  - (d)  $P(0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v} = \langle 7, 2, -10 \rangle$
51. Escriba las ecuaciones paramétricas de la recta  $L$  que contiene los puntos  $P_1$  y  $P_2$ :
- (a)  $P_1(1, -2, -3)$ ,  $P_2(3, 5, 5)$
  - (b)  $P_1(4, 1, 5)$ ,  $P_2(-2, 1, 3)$
52. Explique claramente el procedimiento solicitado en cada uno de los siguientes numerales, suponiendo que se tienen las ecuaciones correspondientes:
- (a) ¿Cómo se determina la distancia de un punto a una recta?
  - (b) ¿Cómo se determina la distancia entre dos rectas paralelas?
  - (c) ¿Cómo se determina la distancia entre dos rectas que no son paralelas y no se cortan?
  - (d) ¿Cómo se determina la intersección entre dos rectas?
53. Calcule la distancia del punto  $P$  a la recta  $L$ .
- (a)  $P(1, -1, -1)$ ,  $L : x = -2 - 2t$ ,  $y = 4t$ ,  $z = 7 + t$
  - (b)  $P(0, 0, 0)$ ,  $L : x = 3 + 2t$ ,  $y = 4 + 3t$ ,  $z = 5 + 4t$
54. Determine las coordenadas del punto de intersección (si lo hay) de los pares de rectas dados.

$$\begin{aligned} & x = 7 + 3s, \quad y = -4 - 3s, \quad z = -7 - 5s \\ \text{(a)} \quad & y \\ & x = 1 + 6t, \quad y = 2 + t, \quad z = 3 - 2t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{x - 6}{4} = y + 3 = z \\ \text{(b)} \quad & y \\ & \frac{x - 11}{3} = \frac{y - 14}{-6} = \frac{z + 9}{2}. \end{aligned}$$

55. Determine la distancia entre los pares de rectas dados.

$$\begin{aligned} & x = 6 + s, \quad y = -2 - 3s, \quad z = 4 - 5s \\ \text{(a)} \quad & y \\ & x = 1 + 2t, \quad y = 2 + t, \quad z = 3 - 4t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{x - 6}{4} = y + 3 = z \\ \text{(b)} \quad & y \\ & \frac{x - 3}{8} = \frac{y - 6}{2} = \frac{z + 9}{2}. \end{aligned}$$



---

## Ecuaciones de superficies en el espacio

---

La introducción de un sistema de coordenadas permite representar algebraicamente lugares geométricos de puntos mediante ecuaciones, inecuaciones o sistema de ecuaciones e inecuaciones que son satisfechas únicamente por las coordenadas de los puntos que pertenecen al lugar geométrico en cuestión. El procedimiento consiste en encontrar las condiciones algebraicas que deben satisfacer las coordenadas de un punto para pertenecer al lugar. La representación algebraica de un lugar geométrico de puntos del espacio se puede hacer mediante ecuaciones, inecuaciones o un sistema de ecuaciones e inecuaciones con tres incógnitas (las coordenadas de los puntos). Más precisamente, una ecuación con tres incógnitas representa un lugar geométrico de puntos del espacio si, y sólo si, las coordenadas de cada punto del lugar satisfacen la ecuación y cada terna de números reales que satisface la ecuación son las coordenadas de un punto del lugar.

Por ejemplo, el plano que contiene un punto  $Q$  y tiene vector normal  $\mathbf{v}$ , es el lugar geométrico de todos los puntos  $P$  del espacio para los que los vectores  $\mathbf{QP}$  y  $\mathbf{v}$  son ortogonales. Si las coordenadas de  $Q$  son  $(x_0, y_0, z_0)$ , las de  $P$  son  $(x, y, z)$  y  $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ , la condición de ortogonalidad, es decir, el que  $\mathbf{QP} \cdot \mathbf{v} = 0$ , se escribe en coordenadas así:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (2.1)$$

que es la *ecuación que representa al plano* que contiene a  $Q(x_0, y_0, z_0)$  y tiene



vector normal  $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ .

El lugar geométrico de todos los puntos  $P(x, y, z)$  del espacio cuya distancia a un punto fijo  $Q(x_0, y_0, z_0)$  es un número real positivo  $r$ , es la superficie de una esfera de radio  $r$  y centro  $Q$ . Como lo vimos en la lección anterior, la condición geométrica “la distancia de  $P$  a  $Q$  es  $r$ ”, se escribe algebraicamente así:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r,$$

o,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \quad (2.2)$$

Esta es precisamente la *ecuación que representa la superficie de la esfera*.

Sea  $\Gamma$  una curva en un plano  $\Pi$ . La unión de todas las rectas perpendiculares al plano  $\Pi$  que intersectan a la curva  $\Gamma$  es la *superficie cilíndrica recta* (o cilindro) con *directriz*  $\Gamma$ . En otras palabras, la superficie cilíndrica recta definida por  $\Gamma$  es el lugar geométrico de puntos  $P$  del espacio cuya proyección ortogonal sobre el plano  $\Pi$  está en la curva  $\Gamma$ . Por ejemplo (vea la figura 2.1), dada la circunferencia  $\Gamma$  en el plano  $XY$  con centro en el origen y radio  $r$ , la unión de todas las rectas perpendiculares al plano  $XY$  que intersectan la circunferencia  $\Gamma$  es una superficie cilíndrica circular recta.

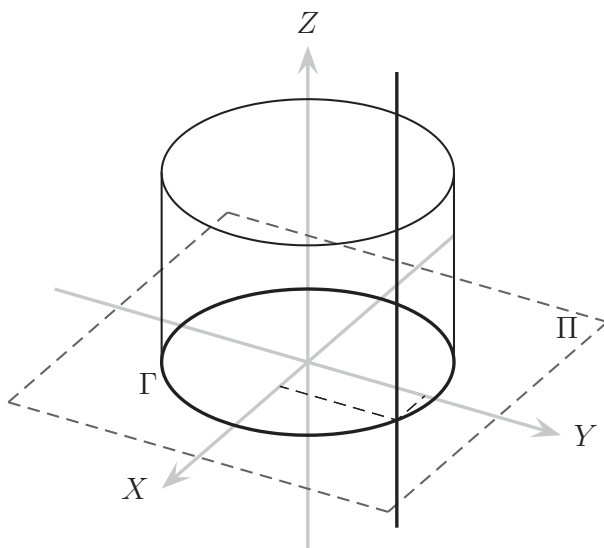


Figura 2.1

Un punto  $P(x, y, z)$  pertenece a esta superficie si, y solamente si, su proyección ortogonal sobre el plano  $XY$  es un punto de la circunferencia. Esto sucede únicamente cuando las coordenadas  $x$  y  $y$  del punto  $P$  satisfacen la ecuación de la circunferencia  $\Gamma$ . Así, el punto  $P(x, y, z)$  está en la superficie cilíndrica recta definida por  $\Gamma$  si y solamente si,  $x^2 + y^2 = r^2$ , que es precisamente la ecuación que representa a la superficie en cuestión. Obsérvese que esta ecuación no impone ninguna restricción sobre la coordenada  $z$  del punto  $P$ .

La superficie de la esfera y la superficie cilíndrica circular recta son superficies cuadráticas (o cuádricas) ya que las ecuaciones que las representan son cuadráticas. En general, si la ecuación de una superficie tiene la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0, \quad (2.3)$$

donde las letras mayúsculas son números reales fijos con la condición de que  $A, B, C, D, E, F$  no sean todos nulos, se dice que la superficie es una superficie cuadrática.

Escogiendo convenientemente los ejes de coordenadas, es decir, trasladando y rotando los ejes de coordenadas originales, se puede demostrar que cualquier superficie cuadrática admite una de las dos formas de ecuación siguientes:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = d, \quad \text{con } d = 1, -1, \text{ o } 0 \quad (2.4)$$

o

$$ax^2 + by^2 = dz, \quad \text{con } d = 1, -1, \text{ o } 0. \quad (2.5)$$

Por ejemplo,  $xy - 1 = 0$  es la ecuación de una superficie cilíndrica recta cuya directriz es la hipérbola en el plano  $XY$  de igual ecuación, pero rotando 45 grados los ejes  $X$  y  $Y$  en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y dejando fijo el eje  $Z$ , la ecuación de la misma superficie es  $\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = 2$ , en las nuevas coordenadas  $\tilde{X}\tilde{Y}Z$ . Se ha usado la sustitución  $x = \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\sqrt{2}}$ ,  $y = \frac{\tilde{x} + \tilde{y}}{\sqrt{2}}$ , que nos da las nuevas coordenadas a partir de las primeras.

Estas superficies se clasifican según los signos de los coeficientes. Por ejemplo, si los coeficientes en (2.4) son todos distintos de cero, la superficie será un *elipsoide* si  $a, b, c$  y  $d$  son positivos; un *hiperboloide elíptico de una sola hoja*, si  $a, b$  y  $d$  son positivos y  $c$  es negativo; un *hiperboloide elíptico de dos hojas*, si  $a$  y  $b$  son positivos y  $c$  y  $d$  son negativos; una *superficie cónica* si  $a$  y  $b$  son

positivos,  $c$  es negativo y  $d$  es cero.

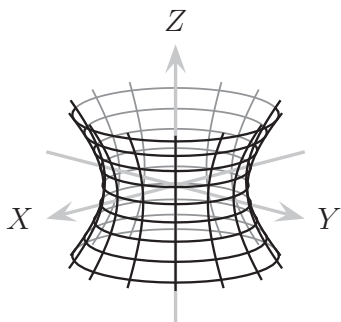


Figura 2.2:  $a, b, d > 0, c < 0$  en (2.4)

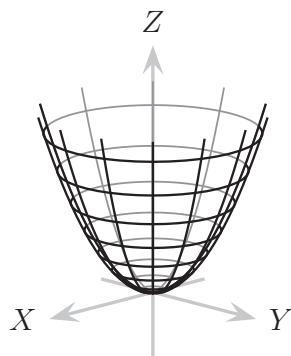


Figura 2.3:  $a, b, d \neq 0$  en (2.5)

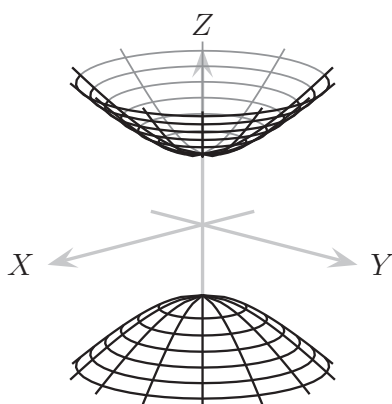


Figura 2.4:  $a, b > 0, c, d < 0$  en (2.4)

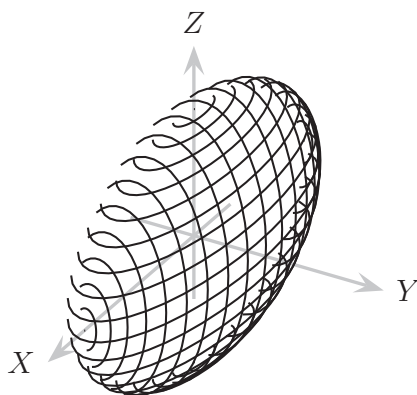


Figura 2.5:  $a, b, c, d > 0$  en (2.4)

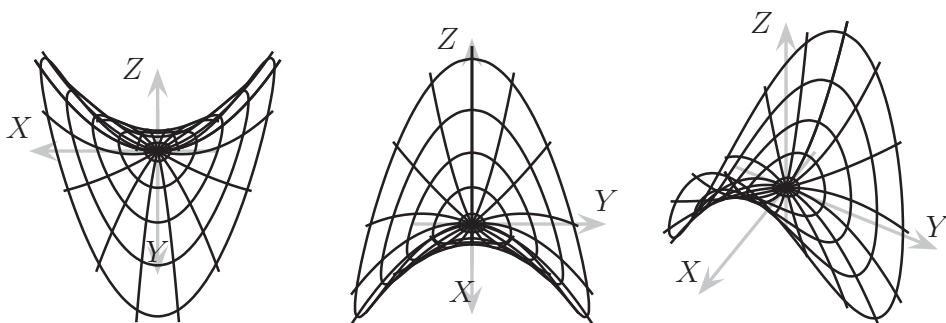


Figura 2.6:  $a$  y  $b$  de signos contrarios en (2.5)

Si los coeficientes en (2.5) son distintos de cero, la superficie será un *paraboloide*

*elíptico* si  $a$  y  $b$  tienen el mismo signo y un *paraboloide hiperbólico* si  $a$  y  $b$  son de signos contrarios. ¿Qué superficies serán aquellas en las que coeficientes en (2.4) y (2.5) se anulan?

Una forma de representar gráficamente una superficie a partir de su ecuación, es buscando información de los cortes de la superficie con planos (frecuentemente paralelos a los planos coordenados). Por ejemplo, si se intersecta la superficie cuadrática de ecuación  $z = x^2 + y^2$  con un plano de ecuación  $z = k$ ,  $k > 0$ , se obtiene la curva de ecuación  $x^2 + y^2 = k$  que para cada valor de  $k$  es la ecuación de una circunferencia en el plano  $z = k$  con centro en el punto  $(0, 0, k)$  y radio  $\sqrt{k}$  (vea la figura 2.7).

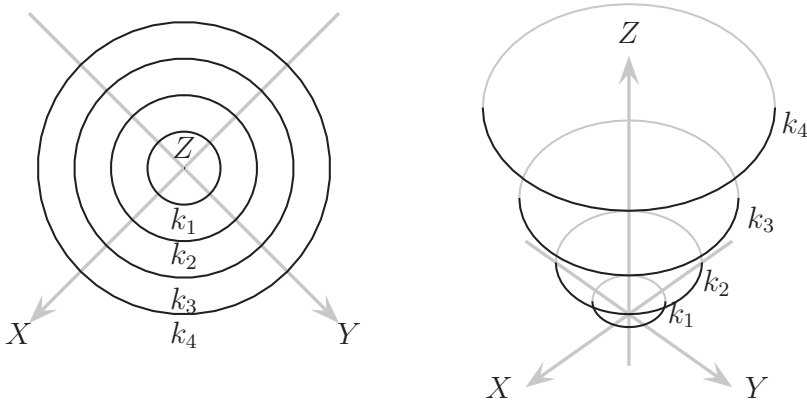


Figura 2.7

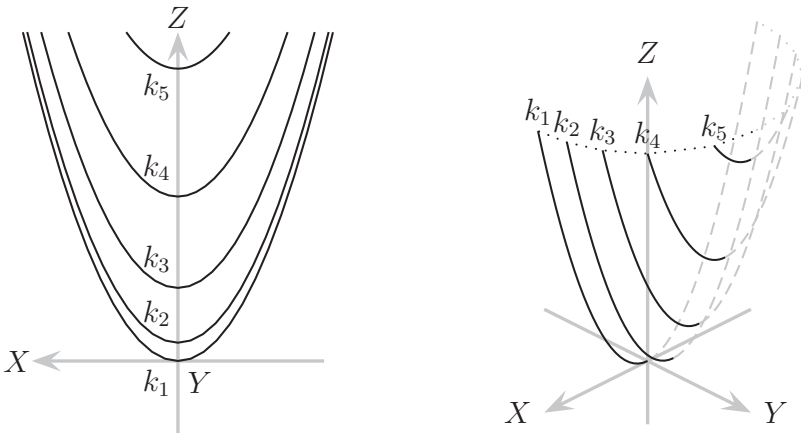


Figura 2.8

Por otro lado, si se intersecta la superficie con un plano de ecuación  $x = k$ , se obtiene la curva de ecuación  $z = y^2 + k^2$  que para cada valor de  $k$  es la ecuación de una parábola en el plano  $x = k$ . Es decir, la intersección de la

superficie con el plano  $x = k$  es una parábola que abre en el sentido positivo del eje  $Z$ , al intersectar la superficie con un plano de ecuación  $y = k$  también se obtiene una parábola (vea la figura 2.8). Dibujando simultáneamente estas circunferencias y parábolas para diferentes valores de  $k$ , se obtiene un bosquejo de la superficie en el espacio, que es un paraboloide circular con eje de simetría el eje  $Z$  (vea la figura 2.9).

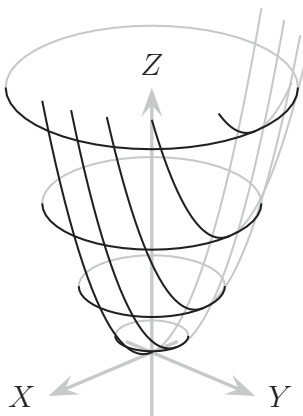


Figura 2.9

Las curvas de intersección obtenidas con este procedimiento se conocen como *trazas*. Las trazas que se obtienen con planos paralelos a los planos coordenados se suelen llamar *trazas paralelas a los planos coordenados*, las paralelas al plano  $XY$ , *trazas horizontales* y las paralelas a los plano  $XZ$  o a  $YZ$ , se suelen llamar *trazas verticales*. Las trazas horizontales de la superficie de ecuación  $z = x^2 + y^2$  están determinadas por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= k, \\ z &= k. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Las trazas verticales están determinadas por los siguiente sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned} z &= k^2 + y^2, & y &= k, \\ x &= k, & z &= x^2 + k^2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

respectivamente.

## Coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas

Además del sistema de coordenadas cartesianas para el espacio, comúnmente se usan el sistema de coordenadas cilíndricas y el sistema de coordenadas

esféricas.

Un sistema de *coordenadas cilíndricas* se introduce fijando un plano en el espacio en el que se considera un sistema de coordenadas polares y un eje numérico  $W$  perpendicular a ese plano de tal forma que el origen del eje coincida con el polo de las coordenadas polares. Las coordenadas cilíndricas de un punto  $P$  serán  $(r, \theta, w)$  donde  $(r, \theta)$  son las coordenadas polares de la proyección ortogonal de  $P$  sobre el plano, y  $w$  es la coordenada de la proyección ortogonal de  $P$  sobre el eje numérico  $W$ .

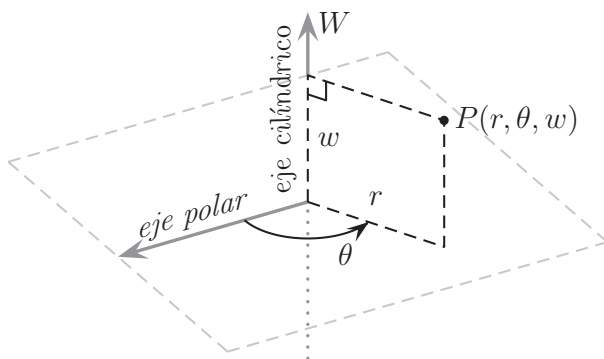


Figura 2.10

Obviamente, la representación algebraica de un conjunto de puntos en el espacio, depende del sistema de coordenadas que se escoge, por ejemplo si se ha introducido un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio para representar un conjunto de puntos, y se quiere determinar la representación usando un sistema de coordenadas cilíndricas se puede hacer escogiendo cualquiera de los planos  $XY$ ,  $XZ$  o  $YZ$  para poner coordenadas polares (de manera conveniente) y el eje numérico restante,  $Z$ ,  $Y$  o  $X$ , respectivamente, para la tercera coordenada. En el primer caso, por ejemplo, haciendo coincidir el eje polar con el eje positivo  $X$ , se puede establecer la relación existente entre las coordenadas  $(x, y, z)$  y las coordenadas  $(r, \theta, w)$  de un punto  $P$ . En efecto, basta recordar la relación que existe entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares de un punto en el plano, bajo las condiciones establecidas. Así, se tiene que

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \theta, & r &\in [0, \infty) & & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 y &= r \operatorname{sen} \theta, & \theta &\in [0, 2\pi) & & \theta &= \arctan \frac{y}{x}, \\
 z &= w, & w &\in (-\infty, +\infty) & & w &= z.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Hay que tener en cuenta que en la expresión para  $\theta$  en (2.8)  $x$  debe ser distinto de cero. En el caso en que  $x = 0$  se toma  $\theta = \pi/2$ .

Teniendo en cuenta esta equivalencia entre las coordenadas de los puntos en los dos sistemas, la ecuación cartesiana de la superficie de la esfera con centro en el punto  $(0, 0, 0)$  (origen del sistema) y radio  $a$ , que es  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  corresponde a la *ecuación cilíndrica* de la superficie de la esfera  $r^2 + z^2 = a^2$ .

Por otro lado, si se escoge el sistema polar en el plano  $XZ$  haciendo coincidir el eje polar con el semieje positivo  $X$ , se tiene que

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= w, \\ z &= r \operatorname{sen} \theta. \end{aligned} \tag{2.9}$$

En este caso la ecuación en coordenadas cilíndricas de la superficie de la esfera es  $y^2 + r^2 = a^2$ .

Un sistema de *coordenadas esféricas* en el espacio se introduce fijando un semiplano, el *semiplano esférico*, delimitado por una recta numérica, *eje esférico*, cuyo origen es el punto  $O$ . Las coordenadas esféricas  $(\rho, \theta, \phi)$  de un punto  $P$ , se obtienen determinando la distancia  $\rho$  del origen  $O$  al punto  $P$ , el ángulo diedro  $\theta$  (en sentido dextrógiro) formado por el semiplano esférico y el semiplano delimitado por el eje esférico y que contiene al punto  $P$ , y el ángulo  $\phi$  que forma el segmento dirigido  $\mathbf{OP}$  con el semieje esférico positivo.

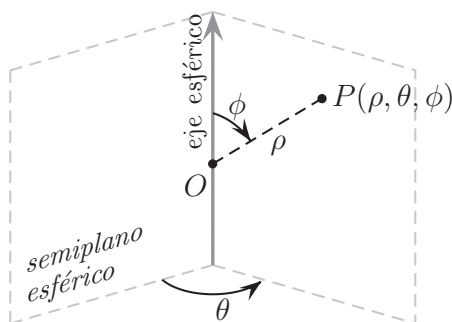


Figura 2.11

Al igual que en el caso anterior, se puede establecer una equivalencia entre las coordenadas cilíndricas y las coordenadas esféricas de un punto en el espacio. Escogiendo, por ejemplo, el eje  $W$  como eje esférico, el semiplano delimitado por el eje  $W$  que contiene el eje polar como semiplano esférico y el origen

del sistema como el polo  $O$ , la relación entre las coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  y las coordenadas  $(\rho, \theta, \phi)$  de un punto  $P$  se obtiene de la siguiente manera. De acuerdo con la figura 2.12, el triángulo  $OQP$  es rectángulo y el ángulo  $QOP$  es  $\phi$  por lo tanto  $w = |OQ| = \rho \cos \phi$ , y  $r = |QP| = \rho \text{sen } \phi$ . Obsérvese que en estas circunstancias el ángulo  $\theta$  es el mismo en los dos sistemas de coordenadas. En resumen,

$$\begin{aligned} r &= \rho \text{sen } \phi, & \rho &\in [0, \infty) & \text{y} & \rho &= \sqrt{r^2 + w^2} \\ \theta &= \theta, & \theta &\in [0, 2\pi) & & \theta &= \theta \\ w &= \rho \cos \phi, & \phi &\in [0, \pi] & & \phi &= \arctan \frac{r}{w}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Si  $w = 0$ , se toma  $\phi = \pi/2$ .

Teniendo en cuenta lo establecido antes entre los sistemas de coordenadas cilíndricas y cartesianas obtenemos la siguiente relación entre las coordenadas esféricas y cartesianas:

$$\begin{aligned} x &= \rho \text{sen } \phi \cos \theta, & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y &= \rho \text{sen } \phi \text{sen } \theta, & \theta &= \arctan \frac{y}{x} \\ z &= \rho \cos \phi, & \phi &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Si  $x = 0$  se toma  $\theta = \pi/2$  y si  $z = 0$  se toma  $\phi = \pi/2$ .

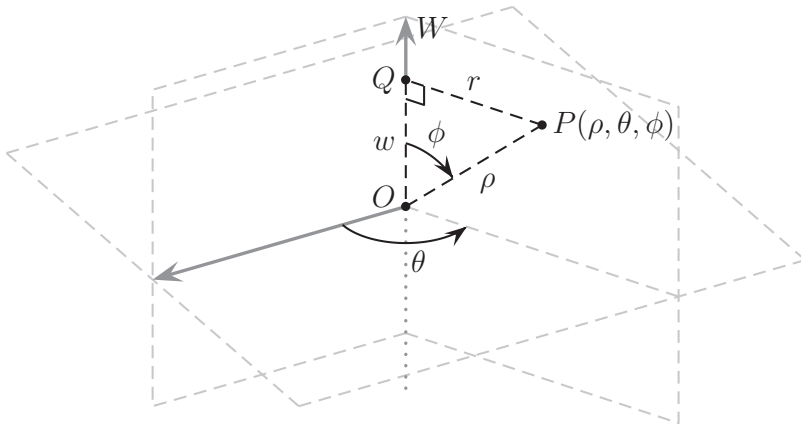


Figura 2.12



## EJERCICIOS

- Determine la ecuación de la superficie de la esfera con centro en el origen y radio 2.
- Determine la ecuación de la superficie de la esfera con centro en el punto  $C(3, 2, 4)$  y radio 5.
- Determine la ecuación de la superficie de la esfera con centro en el punto  $C(-1, 2, -5)$  y que contiene al origen.
- Determine la ecuación de la superficie de la esfera con centro en el punto  $(-1, 3, -2)$  y tangente al plano  $XY$ .
- Determine la ecuación de la superficie de la esfera con centro en el punto  $(-1, 3, -2)$  y tangente al plano  $YZ$ .
- Determine la ecuación de la superficie de la esfera con centro en el punto  $(1, 3, 2)$  y tangente a la superficie de la esfera de ecuación  $x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 + 2z + 2 = 0$ .
- En cada numeral determine si la ecuación corresponde o no a la superficie de una esfera. Si lo hace, determine su centro y su radio:
  - $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 10z + 37 = 0$
  - $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 8z + 19 = 0$
  - $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 4y + 4z - 44 = 0$
  - $x^2 + y^2 - z^2 + 12x + 2y - 4z + 32 = 0$
  - $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6z = 3$ .
  - $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x - y + 3z = 0$ .
- En cada numeral escriba una ecuación del plano que contiene al punto  $Q$  y es perpendicular al vector  $\mathbf{n}$ :
  - $Q(5, 1, -2)$ ,  $\mathbf{n} = \langle 4, -4, 3 \rangle$
  - $Q(6, -2, 0)$ ,  $\mathbf{n} = \langle 2, 6, 4 \rangle$
- En cada numeral escriba una ecuación del plano que contiene los puntos dados:

$$(a) (1, 0, 3), (1, 2, -1), (6, 1, 6) \quad (b) (-3, 1, -3), (4, -4, 3), (0, 0, 1)$$

10. Determine una ecuación del plano paralelo al plano de ecuación  $x - 2y + 7z = 4$  que contiene al punto  $(7, 3, -4)$ .

11. ¿Es posible determinar una ecuación de un plano que contiene al punto  $(2, -1, -3)$ , es perpendicular al plano de ecuación  $x - y + 2z = 5$  y al vector  $\langle -1, 8, 4 \rangle$ ?

12. Determine una ecuación del plano que contiene al punto  $(2, -1, -3)$ , es perpendicular al plano de ecuación  $x - y + 2z = 5$  y al vector  $\langle 0, 8, 4 \rangle$ .

13. En cada numeral calcule la distancia del punto  $Q$  al plano  $\Pi^1$

$$(a) Q(4, 1, 2), \quad \Pi: 3x - y - 5z + 8 = 0$$

$$(b) Q(0, 2, 0), \quad \Pi: -5x + 2y - 7z + 1 = 0$$

14. Determine una ecuación vectorial de la recta de intersección (si la hay) de los pares de planos dados:

$$(a) x + 3y + 2z - 6 = 0, \quad 2x - y + z + 2 = 0$$

$$(b) 3x + y - 5z = 0, \quad x + 2y + z + 4 = 0$$

15. Determine las coordenadas de los puntos de intersección (si los hay) de la recta de ecuación  $\frac{x-6}{4} = y+3 = z$  con el plano de ecuación  $x + 3y + 2z - 6 = 0$ .

16. Las siguientes ecuaciones representan superficies cuadráticas, para cada una dibuje trazas y a partir de ellas haga un bosquejo de la gráfica. De los siguientes nombres deduzca cuál le corresponde a cada ecuación: elipsoide, paraboloides, paraboloides hiperbólicos, hiperboloides de una hoja, hiperboloides de dos hojas, superficie cónica de dos hojas<sup>2</sup>.

$$(a) z = x^2 + y^2.$$

$$(b) x^2 + y^2 = z^2$$

$$(c) x^2 + y^2 = z^2 - 1$$

$$(d) x^2 + y^2 = z^2 + 1$$

$$(e) x^2 - y^2 = z$$

<sup>1</sup> $\Pi$ :  $ax + by + cz = d$  significa que una ecuación de  $\Pi$  es  $ax + by + cz = d$ .

<sup>2</sup>Cuando en (2,4)  $d=0$ ,  $a$  y  $b$  de mismo signo y  $a$  y  $c$  de signo contrario

$$(f) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

17. Determine las coordenadas de los puntos de intersección de la superficie de la esfera de ecuación  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$  y la recta de ecuaciones paramétricas  $x = -1 + 2t$ ,  $y = -2 - 3t$ ,  $z = 3 + t$ .
18. Describa la intersección de las superficies de las esferas de ecuaciones  $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 9$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ , respectivamente.
19. Describa la intersección de la superficie de la esfera de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  y el cilindro de ecuación  $x^2 + y^2 = 4$ , y escriba una ecuación para ella.
20. Determine la traza del hiperboloide de una hoja  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  en el plano  $x = a$ , y la traza en el plano  $y = b$ .
21. Determine la traza del paraboloides hiperbólico  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$  en el plano  $XY$ .
22. Dados tres puntos, no colineales,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  en un plano describa un procedimiento que le permita determinar el centro y el radio de la circunferencia que los contiene.
23. Determine el centro y el radio de la circunferencia que contiene los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$  con coordenadas cartesianas rectangulares  $(2, 3)$ ,  $(1, 5)$  y  $(3, 0)$ , respectivamente.
24. Dados cuatro puntos, no coplanares,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$ , describa un procedimiento geométrico que le permita determinar el centro y el radio de la esfera que los contiene.
25. Determine la ecuación de la superficie de la esfera que contiene los puntos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  con coordenadas cartesianas rectangulares  $(1, -1, 2)$ ,  $(0, 0, 2)$ ,  $(1, -4, 3)$  y  $(0, -1, 3)$ , respectivamente, utilizando el procedimiento descrito en el numeral anterior.
26. Muestre que el hiperboloide de una sola hoja es una *superficie doblemente reglada*, es decir, cada punto de la superficie está en dos rectas contenidas completamente en la superficie.
27. Muestre que el paraboloides hiperbólico es una *superficie doblemente reglada*.

28. Sea  $\sigma$  la superficie de la esfera con radio 1 y centro  $(0, 0, 1)$ , y sea  $\sigma^*$ , la superficie de la esfera  $\sigma$  sin el punto  $N(0, 0, 2)$ . Sea  $P(a, b, c)$  un punto arbitrario en  $\sigma^*$ . La recta que pasa por  $N$  y por  $P$  intersecta el plano  $xy$  en algún punto  $Q(x, y, 0)$ . Encuentre las coordenadas de  $Q$  en términos de  $a$ ,  $b$  y  $c$ . El punto  $Q$  es la *proyección estereográfica* de  $P$ . Esta correspondencia “identifica”  $\sigma^*$  con  $\mathbb{R}^2$ .
29. Cuando se está acostumbrado a trabajar exclusivamente en sistemas de coordenadas cartesianas se dificulta pensar en otros sistemas independientemente de los primeros y se tiende a pasar de forma mecánica, por ejemplo, de un sistema de coordenadas polares a un sistema de coordenadas cartesianas y viceversa, sin apreciar el potencial del sistema de coordenadas polares para resolver problemas particulares. Se propone hacer los siguientes ejercicios sin cambiar a otro sistema de coordenadas, para darle sentido al sistema de coordenadas polares independientemente de los sistemas de coordenadas cartesianas.
- (a) Determine la distancia entre los puntos  $P(r_1, \theta_1)$  y  $Q(r_2, \theta_2)$ , donde  $r_1 \neq 0$  y  $r_2 \neq 0$ .
  - (b) Dados los puntos  $P(r_1, \theta_1)$  y  $Q(r_2, \theta_2)$ , determine las coordenadas polares del punto  $R$  tal que el segmento dirigido  $\mathbf{OR}$  tenga la misma magnitud, la misma dirección y el mismo sentido que el segmento dirigido  $\mathbf{PQ}$ .
  - (c) ¿Qué condición deben satisfacer las coordenadas polares  $r$  y  $\theta$  de un punto  $P$  para que pertenezca a la recta perpendicular al eje polar que pasa por el punto de coordenadas polares  $(3, 0)$ ?
  - (d) ¿Qué condición deben satisfacer las coordenadas polares  $r$  y  $\theta$  de un punto  $P$  para que pertenezca a la recta paralela al eje polar que pasa por el punto de coordenadas polares  $(1, \pi/4)$ ?
  - (e) ¿Qué condición deben satisfacer las coordenadas polares  $r$  y  $\theta$  de un punto  $P$  para que pertenezca a la circunferencia de radio  $a$  cuyo centro tiene coordenadas polares  $(a, 0)$ ?
  - (f) ¿Qué condición deben satisfacer las coordenadas polares  $r$  y  $\theta$  de un punto  $P$  para que pertenezca a la circunferencia de radio  $a$  y cuyo centro tiene coordenadas polares  $(a, \pi/2)$ ?
  - (g) ¿Qué condición deben satisfacer las coordenadas polares  $r$  y  $\theta$  de un punto  $P$  para que pertenezca a la circunferencia de radio  $b$  y cuyo centro tiene coordenadas polares  $(a, \alpha)$ , con  $b < a$ ?

30. Encuentre las coordenadas (a) cilíndricas y (b) esféricas de los puntos cuyas coordenadas cartesianas se dan, explicando de qué manera hizo coincidir los dos sistemas:

(a)  $(2, 2\sqrt{3}, -1)$

(b)  $(-5, 5, 6)$

(c)  $(\sqrt{21}, -\sqrt{7}, 0)$

(d)  $(0, \sqrt{2}, 2)$

31. Dado un sistema de coordenadas en el espacio donde las coordenadas de un punto son  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , las superficies de ecuación  $\alpha = c_1$ ,  $\beta = c_2$  o  $\gamma = c_3$  se denominan *superficies coordenadas* y la intersección entre dos superficies coordenadas se denominan *curvas coordenadas*. Para cada uno de los sistemas estudiados describa las superficies coordenadas y las curvas coordenadas y haga un bosquejo de sus gráficas.

32. Describa el lugar geométrico representado por cada una de las siguientes ecuaciones, en un sistema de coordenadas rectangulares, y haga un bosquejo de la gráfica:

(a)  $x = 2$

(b)  $y = \pi/4$

(c)  $z = -1$

(d)  $x = y$

33. Describa el lugar geométrico representado por cada una de las siguientes ecuaciones, en un sistema de coordenadas cilíndricas, y haga un bosquejo de la gráfica:

(a)  $r = 2$

(b)  $\theta = \pi/4$

(c)  $w = -1$

(d)  $w = r$

(e)  $r = \cos \theta$

(f)  $r = \text{sen } \theta$

34. Describa el lugar geométrico representado por cada una de las siguientes ecuaciones, en un sistema de coordenadas esféricas, y haga un bosquejo de la gráfica:

(a)  $\rho = 2$

- (b)  $\phi = \pi/4$
- (c)  $\theta = 1$
- (d)  $\rho = \cos \phi$
- (e)  $\rho = \text{sen } \phi$
- (f)  $\rho = \cos \theta$
- (g)  $\rho = \text{sen } \theta$

Ayuda: dibuje trazas de las superficies en semiplanos  $\theta = k$ , para diferentes valores de  $k$ .

35. En cada uno de los siguientes numerales, describa el lugar geométrico de todos los puntos  $Q$  del espacio que satisfacen la condición dada y, para cada lugar geométrico, dé una ecuación utilizando un sistema de coordenadas tridimensional adecuado.
- (a) Para un punto  $P$  fijo, la magnitud de  $\mathbf{PQ}$  es 2.
  - (b) Para un punto  $P$  fijo y una recta fija  $l$ , la distancia de  $P$  a  $Q$  es igual a la distancia de  $Q$  a  $l$ .
  - (c) Para puntos  $P$  y  $A$  diferentes y fijos, el ángulo formado por los vectores  $\mathbf{PA}$  y  $\mathbf{PQ}$  es  $\frac{\pi}{6}$ .
  - (d) Para puntos  $P$ ,  $R$  y  $S$  fijos,  $\mathbf{PQ}$  es paralelo a  $\mathbf{RS}$ .
  - (e) Para puntos  $P$ ,  $R$  y  $S$  fijos,  $\mathbf{PQ}$  es perpendicular a  $\mathbf{RS}$ .
  - (f) Para puntos  $P$  y  $R$  fijos,  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son vértices de un triángulo equilátero.
  - (g) Para puntos  $P$  y  $R$  fijos,  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son vértices de un triángulo isosceles.
  - (h) Para puntos  $P$  y  $R$  fijos tales que la magnitud de  $\mathbf{PR}$  es 5 unidades,  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son vértices de un triángulo de área 10 unidades cuadradas.
  - (i) Dada una recta fija  $L$  y un punto  $P$  de la recta, el ángulo formado por la recta y  $\mathbf{PQ}$  es  $\frac{\pi}{6}$ .
  - (j) Dado un plano  $\mathcal{P}$  y una recta  $L$  perpendicular al plano, la distancia de  $Q$  a la recta es igual a la distancia de  $Q$  al plano.
  - (k) Dado un plano  $\mathcal{P}$  y una recta  $L$  perpendicular al plano, la distancia de  $Q$  a la recta es el doble de la distancia de  $Q$  al plano.
  - (l) Dado un plano  $\mathcal{P}$  y un punto  $P$  exterior al plano, la distancia de  $P$  a  $Q$  es igual a la distancia de  $Q$  al plano.

- (m) Dados dos puntos fijos  $P$  y  $R$  y una constante  $K > \|\mathbf{PR}\|$  la suma de las distancias de  $P$  a  $Q$  y de  $Q$  a  $R$  es igual a  $K$ .
36. En un sistema de coordenadas cartesianas determine una ecuación para el conjunto de todos los puntos  $P(x, y, z)$  del espacio tales que la suma de las distancias a los puntos  $F_1(2, 0, 0)$  y  $F_2(-2, 0, 0)$  es 6.
37. En un sistema de coordenadas cartesianas determine una ecuación para el conjunto de todos los puntos  $P(x, y, z)$  del espacio tales que la distancia de  $P$  al punto  $F(0, 0, 3)$  es igual a la distancia de  $P$  al plano de ecuación  $z = -3$ .
38. En un sistema de coordenadas cilíndricas determine una ecuación para el conjunto de todos los puntos  $P(r, \theta, w)$  tales que la distancia de  $P$  al punto  $F(0, 0, 3)$  es igual a la distancia de  $P$  al plano  $w = 5$ .
39. En un sistema de coordenadas cilíndricas determine una ecuación para el conjunto de todos los puntos  $P(r, \theta, w)$  que pertenecen al plano perpendicular al eje polar, que contiene al punto  $Q(5, 0, 0)$ .
40. En un sistema de coordenadas cilíndricas determine una ecuación para el conjunto de todos los puntos  $P(r, \theta, w)$  que pertenecen al plano paralelo tanto al eje polar como al eje  $W$  y que contiene al punto  $Q(5, \frac{\pi}{2}, 0)$ .
41. En un sistema de coordenadas cilíndricas determine una ecuación para el conjunto de todos los puntos  $P(r, \theta, w)$  que pertenecen a la superficie de la esfera con centro en el polo y radio 3.
42. En un sistema de coordenadas cilíndricas determine una ecuación para el conjunto de todos los puntos  $P(r, \theta, w)$  que pertenecen a la superficie de la esfera con centro en el punto  $C(4, \frac{\pi}{4}, 5)$  y radio 3.
43. En un sistema de coordenadas esféricas determine una ecuación para el conjunto de todos los puntos  $P(\rho, \theta, \phi)$  que pertenecen a la superficie cónica que tiene como eje de simetría el semieje esférico y ángulo de la generatriz  $\frac{\pi}{6}$ .
44. En un sistema de coordenadas esféricas determine una ecuación para el conjunto de todos los puntos  $P(\rho, \theta, \phi)$  que pertenecen a la superficie de la esfera con centro en el origen y radio 3.
45. En un sistema de coordenadas esféricas determine una ecuación para el conjunto de todos los puntos  $P(\rho, \theta, \phi)$  que pertenecen a la superficie de la esfera con centro en el punto  $C(5, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$  y radio 3.

46. En un sistema de coordenadas esféricas determine una ecuación para el conjunto de todos los puntos  $P(\rho, \theta, \phi)$  que pertenecen al plano perpendicular al eje esférico y que contiene al punto  $Q(4, 0, 0)$ .
47. Escriba las ecuaciones dadas en coordenadas (a) cilíndricas, haciendo corresponder el eje  $Z$  con el eje  $W$  y el eje polar con el semieje positivo  $X$  y (b) esféricas, haciendo corresponder el eje  $Z$  con el eje esférico y el semiplano esférico con el semiplano  $XZ$  en el cual  $x \geq 0$ :
- (a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  (b)  $x^2 + y^2 = 2y$  (c)  $x^2 + y^2 + 9z^2 = 36$
48. Describa la intersección de las superficies cuyas ecuaciones en coordenadas esféricas son  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y  $\phi = \frac{\pi}{4}$ .
49. Muestre que para  $a \neq 0$ ,  $\rho = 2a \sin \phi \cos \theta$  es la ecuación en coordenadas esféricas de la superficie de la esfera con centro  $(a, 0, 0)$  y radio  $|a|$ .
50. Sea  $P(a, \theta, \phi)$  un punto en coordenadas esféricas, con  $a > 0$  y  $0 < \phi < \pi$ . Entonces  $P$  está en la superficie de la esfera  $\rho = a$ . Como  $0 < \phi < \pi$ , el segmento de recta desde el origen hasta  $P$  se puede extender hasta intersectar el cilindro dado por  $r = a$  en coordenadas cilíndricas. Encuentre las coordenadas cilíndricas del punto de intersección.
51. Describa el tetrahedro sólido de vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(2, 0, 0)$ ,  $(0, 3, 0)$ , y  $(0, 0, 5)$  usando coordenadas cartesianas, es decir, imponga condiciones sobre  $x$ ,  $y$  y  $z$  para que el punto  $P(x, y, z)$  esté en el tetrahedro.
52. Represente el sólido en el espacio, de puntos con coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, w)$  tales que  $1 \leq r \leq 2$ ,  $\pi/6 \leq \theta \leq \pi/4$  y  $1 \leq w \leq 2$ .
53. Los siguientes sólidos están encerrados por superficies en el espacio. Describalos usando coordenadas cilíndricas.
- (a) Un cubo sólido de arista 1.
- (b) Un cilindro circular recto de altura 5 y radio 3.
- (c) La superficie de una esfera de radio 4.
- (d) La superficie de una esfera de radio 4 perforada simétricamente por un cilindro de radio 2.
- (e) El sólido dentro de la superficie de una esfera de radio 4 y fuera de la superficie de la esfera de radio 2 de igual centro que la primera.



54. Sean  $P_1$  y  $P_2$  puntos cuyas coordenadas esféricas son  $(\rho_1, \theta_1, \phi_1)$  y  $(\rho_2, \theta_2, \phi_2)$ , respectivamente. Sea  $\mathbf{v}_1$  el vector desde el origen hasta  $P_1$ , y sea  $\mathbf{v}_2$  el vector desde el origen hasta  $P_2$ . Para el ángulo  $\gamma$  entre  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , muestre que

$$\cos \gamma = \cos \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos(\theta_2 - \theta_1).$$

55. Muestre que la distancia  $d$  entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$  con coordenadas cilíndricas  $(r_1, \theta_1, w_1)$  y  $(r_2, \theta_2, w_2)$ , respectivamente, es

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + (w_2 - w_1)^2}.$$

56. Muestre que la distancia  $d$  entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$  con coordenadas esféricas  $(\rho_1, \theta_1, \phi_1)$  y  $(\rho_2, \theta_2, \phi_2)$ , respectivamente, es

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 [\sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \cos \phi_1 \cos \phi_2]}.$$

## LECCIÓN 3

---

### Funciones vectoriales y parametrización

---

En esta lección estudiaremos funciones definidas en conjuntos especiales de  $\mathbb{R}^n$  denominados celdas.

Una *1-celda*  $\mathcal{I}$  es un intervalo cerrado  $[a, b]$  de números reales<sup>1</sup>, es decir,

$$\mathcal{I} = [a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}.$$

Una *2-celda*  $\mathcal{R}$  es el producto cartesiano de dos 1-celdas  $[a, b]$  y  $[c, d]$ , es decir

$$\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] = \{(u, v) : a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d\}.$$

Una *3-celda*  $\mathcal{P}$  es el producto cartesiano de tres 1-celdas  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  y  $[e, h]$ , es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= [a, b] \times [c, d] \times [e, h] \\ &= \{(u, v, w) : a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d, \quad e \leq w \leq h\} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Las 1-celdas serán los dominios de funciones vectoriales de una sola variable. Aunque, en los libros de cálculo se consideran las funciones vectoriales definidas en dominios más generales, en esta lección consideraremos los dominios de funciones vectoriales de una variable como 1-celdas. En algunos casos permitiremos también que las 1-celdas sean de las siguientes formas:  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $[a, b]$ ,  $[a, +\infty)$ ,  $(a, +\infty)$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $(-\infty, b)$  o  $(-\infty, +\infty)$ .

Una *función vectorial*<sup>2</sup> es una función definida en alguna celda y que toma valores en el espacio de vectores bidimensionales o tridimensionales<sup>3</sup>. La función vectorial es de una variable si su dominio es una 1-celda, de dos variables si su dominio es una 2-celda y de tres variables si su dominio es una 3-celda.

Una *función vectorial tridimensional de una variable* es una función definida en una 1-celda  $\mathcal{I}$  que toma valores en  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{r} : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{dada por } \mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

Por ser una función que toma valores en  $\mathbb{R}^3$ , tiene tres funciones componentes, a saber,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Cada una de éstas es una función escalar definida en  $\mathcal{I}$  y que toma valores en  $\mathbb{R}$ . Debido a esto, los conceptos estudiados en los cursos de cálculo diferencial e integral, para funciones reales de valor real, se extienden naturalmente a estas funciones vectoriales. Por ejemplo, si los límites  $\lim_{t \rightarrow a} x(t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow a} y(t)$  y  $\lim_{t \rightarrow a} z(t)$  existen, el límite  $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t)$  existe y

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \rightarrow a} x(t), \lim_{t \rightarrow a} y(t), \lim_{t \rightarrow a} z(t) \right\rangle. \quad (3.1)$$

Como consecuencia de lo anterior la función vectorial  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  es *diferenciable* en  $\mathcal{I}$  si cada una de sus componentes escalares lo es. Además, si las derivadas  $\frac{dx}{dt}(a)$ ,  $\frac{dy}{dt}(a)$  y  $\frac{dz}{dt}(a)$  existen, la derivada de la función vectorial  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  en  $t = a$  es

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(a) = \left\langle \frac{dx}{dt}(a), \frac{dy}{dt}(a), \frac{dz}{dt}(a) \right\rangle \quad (3.2)$$

y, si las funciones componentes son continuas en  $a$ , la función  $\mathbf{r}$  es *continua* en  $a$ .

Por otro lado, si cada una de las componentes escalares de  $\mathbf{r}$  son integrables sobre  $\mathcal{I} = [a, b]$ , entonces  $\mathbf{r}$  es *integrable* sobre  $[a, b]$  y

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left\langle \int_a^b x(t) dt, \int_a^b y(t) dt, \int_a^b z(t) dt \right\rangle.$$

Si  $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$  y  $\mathbf{s}(t) = \langle \tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t) \rangle$  son dos funciones vectoriales con dominio  $\mathcal{I}$ , se definen naturalmente en dicho intervalo las funciones

<sup>2</sup>En realidad, una función vectorial es una función definida en algún conjunto y que toma valores en algún espacio vectorial. Sin embargo, en estas lecciones trabajaremos con funciones vectoriales definidas en celdas y con valores en  $\mathbb{R}^2$  o en  $\mathbb{R}^3$ .

<sup>3</sup>En casos especiales podríamos considerar también espacios de vectores unidimensionales

vectoriales

$$(\mathbf{r} + \mathbf{s})(t) = \langle x(t) + \tilde{x}(t), y(t) + \tilde{y}(t), z(t) + \tilde{z}(t) \rangle,$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{s})(t) = \langle x(t) - \tilde{x}(t), y(t) - \tilde{y}(t), z(t) - \tilde{z}(t) \rangle,$$

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{s})(t)$$

$$= \langle y(t)\tilde{z}(t) - z(t)\tilde{y}(t), z(t)\tilde{x}(t) - x(t)\tilde{z}(t), x(t)\tilde{y}(t) - y(t)\tilde{x}(t) \rangle,$$

la función escalar

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})(t) = x(t)\tilde{x}(t) + y(t)\tilde{y}(t) + z(t)\tilde{z}(t),$$

si  $f$  es una función escalar definida en el misma celda, la función vectorial

$$(f\mathbf{r})(t) = \langle f(t)x(t), f(t)y(t), f(t)z(t) \rangle,$$

si  $\mathbf{r}$  es derivable en  $I$ , la función vectorial

$$\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle,$$

y si existen las antiderivadas de las componentes, la familia de funciones vectoriales

$$\int \mathbf{r}(t)dt = \left\langle \int x(t)dt, \int y(t)dt, \int z(t)dt \right\rangle.$$

Para cada valor de  $t$ , el vector  $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$  se puede interpretar como el vector posición de un punto  $P_t$  de coordenadas  $(x(t), y(t), z(t))$ . Así, cuando  $t$  recorre la 1-celda  $\mathcal{I}$ , el punto  $P_t$  describe una curva en el espacio. Se dice en este caso que las *ecuaciones paramétricas* de la curva son

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \text{con } t \in \mathcal{I}.$$

o que  $\mathbf{r}$  es una *parametrización* de la curva.

En otras palabras, el conjunto

$$C = \{P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{OP} = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle, \quad t \in I\},$$

representa una curva en el espacio<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>Si  $P$  tiene coordenadas  $(x, y, z)$  y  $\mathbf{r}$  tiene componentes escalares  $x, y$  y  $z$ , diremos que  $\mathbf{r}$  *señala* a  $P$  desde el origen de coordenadas ya que  $\mathbf{r}$  es el vector posición del punto  $P$ .  $C$  es el conjunto de puntos que la función vectorial  $\mathbf{r}$  *señala* desde el origen cuando  $t$  recorre la 1-celda  $I$ ,

Por ejemplo, consideremos el segmento de recta  $AB$ , que es el conjunto de puntos  $P(x, y, z)$  de la recta que pasa por  $A(a_0, b_0, c_0)$  y  $B(a_1, b_1, c_1)$  y que están entre  $A$  y  $B$ . Esta recta tiene vector director  $\langle a_1 - a_0, b_1 - b_0, c_1 - c_0 \rangle$  y por consiguiente las coordenadas de  $P$  deben satisfacer las ecuaciones paramétricas de la recta

$$x = a_0 + t(a_1 - a_0), \quad y = b_0 + t(b_1 - b_0), \quad z = c_0 + t(c_1 - c_0),$$

o,

$$x = (1 - t)a_0 + ta_1, \quad y = (1 - t)b_0 + tb_1, \quad z = (1 - t)c_0 + tc_1,$$

imponiendo la condición de que  $t$  esté en  $[0, 1]$  para garantizar que  $P$  esté entre  $A$  y  $B$ .

Podemos así decir que la función vectorial

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \langle (1 - t)a_0 + ta_1, (1 - t)b_0 + tb_1, (1 - t)c_0 + tc_1 \rangle \\ &= (1 - t) \langle a_0, b_0, c_0 \rangle + t \langle a_1, b_1, c_1 \rangle \\ &= (1 - t)\mathbf{OA} + t\mathbf{OB} \end{aligned} \tag{3.3}$$

$t \in [0, 1]$ , parametriza el segmento de recta  $AB$ .

Parametricemos ahora la curva de intersección de dos superficies. Considérese la curva  $\Gamma$  de intersección de la superficie cilíndrica de ecuación  $x^2 + y^2 = 4$ , con el plano de ecuación  $z = x + 3$ . En otras palabras  $\Gamma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4 \wedge z = x + 3\}$ . Si para algún  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $(x, y, z)$  satisface las ecuaciones  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \operatorname{sen} t$ , el punto  $P(x, y, z)$  pertenecerá a la superficie  $x^2 + y^2 = 4$ , ya que, en este caso,  $x^2 + y^2 = 4 \cos^2 t + 4 \operatorname{sen}^2 t = 4$ . Si además,  $z = (2 \cos t) + 3$ , el punto  $P(x, y, z)$  pertenecerá al plano  $z = x + 3$ . Así,

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \operatorname{sen} t, \quad z = 2 \cos t + 3,$$

con  $t \in [0, 2\pi]$ , son ecuaciones paramétricas de  $\Gamma$  y

$$\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t, 2 \cos t + 3 \rangle$$

con  $t \in [0, 2\pi]$ , parametriza a  $\Gamma$ .

Es de anotar que una curva no tiene una única parametrización. Por ejemplo, las funciones vectoriales  $\mathbf{r}_1(t) = \cos t \mathbf{i} + \operatorname{sen} t \mathbf{j}$ , con  $t \in [0, 2\pi]$ , y  $\mathbf{r}_2(t) = \cos 2t \mathbf{i} + \operatorname{sen} 2t \mathbf{j}$ , con  $t \in [0, \pi]$ , parametrizan la circunferencia con centro en  $(0, 0)$  y radio 1.

Una *función vectorial tridimensional*<sup>5</sup> de dos variables es una función definida en una 2-celda  $\mathcal{R}$  que toma valores en  $\mathbb{R}^3$  :

$$\mathbf{r} : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{dada por } \mathbf{r}(u, v) = \langle x(u, v), y(u, v), z(u, v) \rangle$$

Si  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ , para cada valor  $u_0 \in [a, b]$  y cada valor  $v_0 \in [c, d]$  se obtienen funciones vectoriales de una sola variable

$$\mathbf{r}_1 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\mathbf{r}_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

definidas por  $\mathbf{r}_1(v) = \mathbf{r}(u_0, v)$  y  $\mathbf{r}_2(u) = \mathbf{r}(u, v_0)$ , respectivamente. Si para todo  $(u_0, v_0) \in \mathcal{R}$ , las funciones  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  son diferenciables, el conjunto

$$\{P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{OP} = \langle x(u, v), y(u, v), z(u, v) \rangle, \quad (u, v) \in \mathcal{R}\}, \quad (3.4)$$

que es el conjunto de puntos que la función vectorial  $\mathbf{r}$  *señala* desde el origen cuando  $(u, v)$  recorre  $\mathcal{R}$ , representa una *superficie* en el espacio y se dice que  $\mathbf{r}$  es una *parametrización de la superficie*.

Para ilustrar lo dicho, parametricemos la superficie  $\sigma$  del plano limitada por las gráficas de las funciones  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = -x^2 + 2x + 4$  (vea la figura (3.1)). En este caso como la superficie es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , la función vectorial que buscamos toma valores en  $\mathbb{R}^2$ , y por lo tanto tendrá sólo dos componentes. Procedemos de la siguiente manera:

1. Los puntos de intersección de las gráficas son  $(-1, 1)$  y  $(2, 4)$ . Todos los puntos de  $\sigma$  tienen abscisa  $x$  entre  $-1$  y  $2$ , por lo que podemos tomar como primer parámetro  $u = x$  con  $-1 \leq u \leq 2$ .
2. Para cada  $u \in [-1, 2]$  consideramos los puntos  $A(u, f(u))$  en la gráfica de  $f$  y  $B(u, g(u))$  en la gráfica de  $g$ .
3. El segmento  $AB$ , que está contenido en  $\sigma$ , se puede parametrizar mediante la función vectorial (vea (3.3))

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= (1 - v) \langle u, f(u) \rangle + v \langle u, g(u) \rangle \\ &= (1 - v) \langle u, u^2 \rangle + v \langle u, -u^2 + 2u + 4 \rangle \\ &= \langle u, u^2 - 2vu^2 + 2vu + 4v \rangle \end{aligned}$$

con  $0 \leq v \leq 1$ , lo que nos da una parametrización de  $\sigma$  limitada por las curvas dadas.

---

<sup>5</sup>Pueden considerarse también funciones vectoriales bidimensionales de dos variables, es decir definidas en 2-celdas y que toman valores en  $\mathbb{R}^2$

4. Obsérvese que el dominio de  $\mathbf{r}$  es  $[-1, 2] \times [0, 1]$

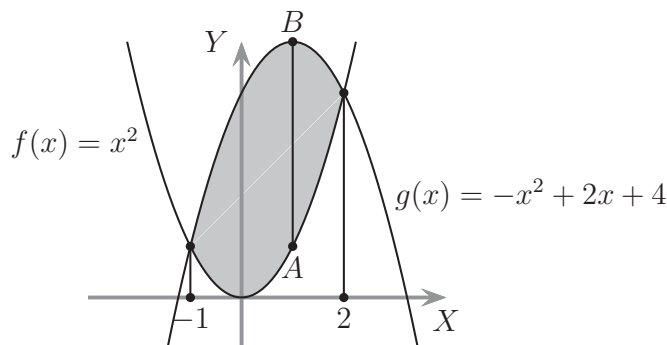


Figura 3.1: La superficie  $\sigma = \{P(x, y) : -1 \leq x \leq 2 \wedge x^2 \leq y \leq -x^2 + 2x + 4\}$

Parametricemos ahora la superficie  $\sigma$  que es la parte del paraboloide de ecuación  $z = x^2 + y^2$  que se encuentra dentro del cilindro circular recto de ecuación  $x^2 + y^2 = 4$ , en otras palabras  $\sigma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge z = x^2 + y^2\}$ .

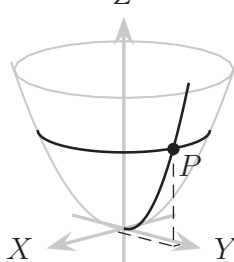


Figura 3.2: La superficie  $\sigma = \{P(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge z = x^2 + y^2\}$

Procedemos de la siguiente manera. Para cada  $u \in \mathbb{R}^+$ ,  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$  con  $v$  variando entre 0 y  $2\pi$  parametriza una circunferencia con centro en el origen y radio  $u$ . Por lo tanto, si además de variar  $v$ , hacemos variar a  $u$  entre 0 y 2,  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$  parametriza el disco en el plano  $XY$  con centro en el origen y radio 2. Así, para cada punto  $(x, y, z)$  de  $\sigma$  existe un valor de  $u$  entre 0 y 2 y uno de  $v$  entre 0 y  $2\pi$  tales que  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$  y, como  $z = x^2 + y^2$ , entonces  $z = u^2$ . En consecuencia, una parametrización de  $\sigma$  es

$$\mathbf{r} : [0, 2] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definida por

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle u \cos v, u \sin v, u^2 \rangle.$$

Al igual que en la parametrización de curvas, la parametrización de una superficie no es única, ya que existen muchas funciones vectorial de dos variables que señalan una superficie determinada.

Una *función vectorial tridimensional de tres variables* es una función definida en una 3-celda  $\mathcal{P}$  que toma valores en  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{r} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por:

$$\mathbf{r}(u, v, w) = \langle x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w) \rangle$$

Si  $\mathcal{P} = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$ , para cada valor  $u_0 \in [a, b]$ , cada valor  $v_0 \in [c, d]$  y cada valor  $w_0 \in [e, h]$  se obtienen funciones vectoriales de una sola variable

$$\mathbf{r}_1 : [e, h] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\mathbf{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

y

$$\mathbf{r}_3 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

definidas por  $\mathbf{r}_1(w) = \mathbf{r}(u_0, v_0, w)$ ,  $\mathbf{r}_2(v) = \mathbf{r}(u_0, v, w_0)$  y  $\mathbf{r}_3(u) = \mathbf{r}(u, v_0, w_0)$ , respectivamente. Si para todo  $(u_0, v_0, w_0) \in \mathcal{P}$  las funciones  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  y  $\mathbf{r}_3$  son diferenciables, el conjunto

$$\{P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{OP} = \langle x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w) \rangle, (u, v, w) \in \mathcal{P}\},$$

que es el conjunto de puntos que la función vectorial  $\mathbf{r}$  señala desde el origen, representa una *sólido en el espacio*.

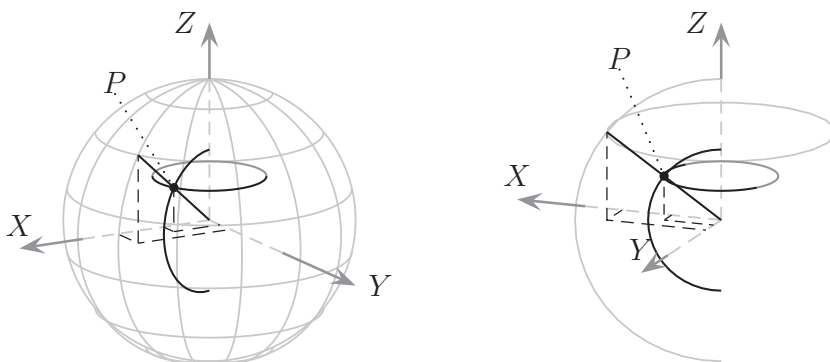


Figura 3.3: El sólido  $\Lambda = \{P(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$  es una esfera concéntrica en el origen y radio  $a$

En muchos casos es posible encontrar una función vectorial de tres variables que recorra un sólido  $\Lambda$  determinado. Dicha función vectorial es una



parametrización de  $\Lambda$ . Por ejemplo, la función vectorial  $\mathbf{r} : [0, 2] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\mathbf{r}(u, v, w) = \langle u \cos v \operatorname{sen} w, u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w, u \cos w \rangle,$$

es una parametrización de la esfera sólida  $\Lambda = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ . Es claro que

$$\Lambda = \{(u \cos v \operatorname{sen} w, u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w, u \cos w) : (u, v, w) \in [0, 2] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]\}.$$

Las funciones vectoriales y su cálculo se usan frecuentemente en dos contextos que estudiaremos a continuación.

### Geometría de curvas y superficies

Supongamos que la curva  $\Gamma$  está parametrizada por la función vectorial diferenciable

$$\mathbf{r} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle.$$

Diremos que  $\Gamma$  es *regular* si  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ , para todo  $t \in \mathcal{I}$  y, en este caso, que el vector

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|},$$

es el *vector unitario tangente*<sup>6</sup> a  $\Gamma$  en el punto  $P(x(t), y(t), z(t))$ . Como  $\mathbf{T}(t)$  y  $\mathbf{r}'(t)$  son paralelos, entonces  $\mathbf{r}'(t)$  también es un vector tangente a  $\Gamma$  en el punto  $P(x(t), y(t), z(t))$ . Una propiedad interesante de los vectores  $\mathbf{T}(t)$  y  $\mathbf{T}'(t)$  es que son perpendiculares para todo  $t$ . Este hecho se deduce fácilmente al calcular la derivada de la función constante  $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T})(t) = 1$ . En efecto,

$$0 = \frac{d}{dt} [\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}(t)] = 2\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) \quad (3.5)$$

Fijemos un punto  $P$  sobre una curva  $\Gamma$  junto con una orientación determinada y tomemos otro punto  $Q$  sobre ella. El procedimiento que consiste en escribir las coordenadas de  $Q$  en términos de la longitud del arco de curva desde  $P$  hasta  $Q$ , se conoce como *parametrización por longitud de arco* de la curva  $\Gamma$ . La longitud de este arco es precisamente la distancia que hay que recorrer sobre la curva

---

<sup>6</sup>En realidad, hay dos vectores tangentes unitarios. El otro se obtiene recorriendo  $\Gamma$  en sentido contrario mediante una parametrización conveniente. Sin embargo, podríamos preguntarnos si con otra parametrización no sería posible obtener otros vectores tangentes unitarios. ¿Podría ser?

partiendo de  $P$  y llegando a  $Q$ . Encontrar directamente la parametrización por longitud de arco de una curva es muy difícil (si no imposible) por lo que se recurre a encontrar primero una parametrización conveniente y utilizarla para calcular la longitud del arco que parte de  $P$  y llega a  $Q$ . En cursos de cálculo anteriores se dedujo una fórmula para calcular la longitud de estos arcos para curvas en el plano. De manera similar se puede deducir una fórmula para calcular *longitudes de curvas* en el espacio.

Recordemos que la longitud de arco entre  $P(x(a), y(a))$  y  $Q(x(t_0), y(t_0))$  de una curva  $\Gamma$  en el plano, parametrizada por

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in \mathcal{I},$$

es

$$\int_a^{t_0} \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} d\tau,$$

y para el caso de una curva en el espacio, haciendo un razonamiento análogo, al que se hace para obtener esta fórmula, se tiene que la longitud de arco entre  $P(x(a), y(a), z(a))$  y  $Q(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$  de una curva  $\Gamma$  en el espacio parametrizada por

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad t \in \mathcal{I}.$$

es

$$\int_a^{t_0} \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2 + z'(\tau)^2} d\tau.$$

Obsérvese que, siendo la función vectorial  $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$  una parametrización de  $\Gamma$ , la integral anterior se puede escribir en la forma

$$\int_a^{t_0} \|\mathbf{r}'(\tau)\| d\tau.$$

Evidentemente, el valor de esta integral depende de la posición del punto  $Q$  sobre la curva y por lo tanto es, en realidad, una función  $s = s(t)$ :

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(\tau)\| d\tau. \quad (3.6)$$

Esta función siempre es invertible (¿por qué?), por lo tanto podemos escribir las coordenadas del punto  $Q$  en términos de la longitud de arco así:

$Q(x(t(s)), y(t(s)), z(t(s)))$ , donde  $t = t(s)$  es la inversa de  $s$ . Se obtiene así la parametrización por longitud de arco de  $\Gamma$ :

$$x = \tilde{x}(s) = x(t(s)), \quad y = \tilde{y}(s) = y(t(s)) \quad z = \tilde{z}(s) = z(t(s)) \quad t \in \mathcal{I}.$$

La función vectorial que parametriza a  $\Gamma$  es ahora

$$\tilde{\mathbf{r}}(s) = \langle \tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s) \rangle.$$

Tenemos entonces que  $\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(s(t))$  y por lo tanto,

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d}{dt} [\tilde{\mathbf{r}}(s(t))] = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{ds}(s(t)) \frac{ds}{dt}(t) = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{ds}(s(t)) \|\mathbf{r}'(t)\|$$

ya que la derivada de  $s$  es precisamente  $\|\mathbf{r}'(t)\|$ , por el Teorema Fundamental del Cálculo (vea (3.5)). De aquí que

$$\frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{ds}(s(t)) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \mathbf{T}(t),$$

lo que muestra que el vector tangente que se obtiene mediante parametrizaciones por longitud de arco es unitario.

La dirección de la curva  $\Gamma$  en cada punto  $Q(x(t), y(t), z(t))$  está representada por el vector  $\mathbf{T}(t)$ . La *curvatura* de  $\Gamma$  es una medida de la rapidez con que cambia la dirección de la curva con respecto al desplazamiento sobre ella. Esta medida está dada por

$$\kappa = \left\| \frac{d\mathbf{T}(t(s))}{ds} \right\|,$$

donde  $s$  es el parámetro de longitud de arco. Usando la regla de la cadena obtenemos,

$$\frac{d\mathbf{T}(t(s))}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt}(t(s)) \frac{dt}{ds}(s) = \frac{d\mathbf{T}}{dt}(t(s)) \frac{1}{\frac{ds}{dt}(t(s))} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}(t(s))}{\|\mathbf{r}'(t(s))\|}.$$

De aquí se obtiene la relación

$$\left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt}(t(s)) \right\| = \kappa \|\mathbf{r}'(t(s))\| \quad (3.7)$$

que necesitaremos más adelante.

La fórmula que define a  $\kappa$  es dispendiosa de calcular, porque involucra el cálculo del vector tangente unitario y la reparametrización por longitud de

arco. Hay otras maneras de calcular la curvatura sin necesidad de hacer ésto.

Como  $\mathbf{r}' = \|\mathbf{r}'\| \mathbf{T} = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}$ , entonces

$$\mathbf{r}'' = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}' + \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T}$$

y por lo tanto,

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{T} \times \mathbf{T}' = \|\mathbf{r}'\|^2 \mathbf{T} \times \mathbf{T}'.$$

Calculando la norma de este producto, teniendo en cuenta que  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{T}'$  son perpendiculares (vea (3.6)) y que  $\|\mathbf{T}'\| = \kappa \|\mathbf{r}'\|$  se obtiene

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\| = \left\| \|\mathbf{r}'\|^2 \mathbf{T} \times \mathbf{T}' \right\| = \|\mathbf{r}'\|^2 \|\mathbf{T}'\| = \|\mathbf{r}'\|^3 \kappa.$$

Despejando  $\kappa$  obtenemos una fórmula para calcular la curvatura de  $\Gamma$  a partir de  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$  y  $\mathbf{r}''$ :

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3}. \quad (3.8)$$

Consideremos ahora el vector  $\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$ , que es un vector unitario perpendicular a  $\mathbf{T}(t)$  (vea (3.4)). Es decir,  $\mathbf{N}$  es un vector unitario perpendicular a  $\Gamma$  en el punto  $P(x(t), y(t), z(t))$  que se conoce como *vector normal unitario*. Este vector indica la dirección en la que se dobla curva. El plano que contiene al punto  $P(x(t), y(t), z(t))$  y es paralelo a  $\mathbf{T}(t)$  y a  $\mathbf{N}(t)$ , se denomina *plano osculador* de  $\Gamma$  en el punto  $P(x(t), y(t), z(t))$ . Un vector normal a este plano es

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N},$$

que también es unitario y que se conoce como *vector binormal* de  $\Gamma$  en el punto  $P$ .

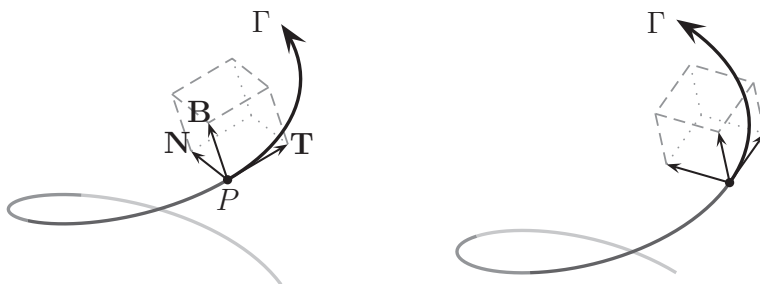


Figura 3.4

En el plano osculador, la circunferencia que pasa por el punto  $P$ , tiene los mismos vector tangente unitario y normal unitario que  $\Gamma$  en  $P$  y tiene radio  $r = 1/\kappa$  se denomina *circunferencia osculadora* y es la que mejor aproxima a  $\Gamma$  en el punto  $P$ . Esto último quiere decir que la curva  $\Gamma$  y la circunferencia tienen la misma curvatura en el punto  $P$ .

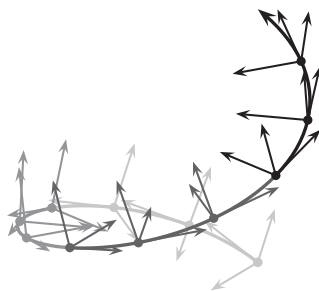


Figura 3.5

Sea  $\sigma$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$  parametrizada por una función vectorial de dos variables  $\mathbf{r} : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\mathbf{r}(u, v) = \langle x(u, v), y(u, v), z(u, v) \rangle$ , y  $P(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$  un punto de la superficie. Obsérvese que las funciones vectoriales

$$\mathbf{r}_1 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

y

$$\mathbf{r}_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definidas por  $\mathbf{r}_1(v) = \mathbf{r}(u_0, v)$  y  $\mathbf{r}_2(u) = \mathbf{r}(u, v_0)$ , respectivamente, parametrizan dos curvas  $\Gamma_{u_0}$  y  $\Gamma_{v_0}$  contenidas en la superficie  $\sigma$  y que se cortan en  $P$  (vea la figura (3.6)). Al calcular las derivadas de  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  en  $v_0$  y  $u_0$ , respectivamente, obtenemos dos vectores tangentes a  $\Gamma_{u_0}$  y  $\Gamma_{v_0}$ , respectivamente, en el punto  $P$ . Explícitamente, estos vectores tangentes están dados por

$$\mathbf{r}'_1(v_0) = \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \langle x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0), z_v(u_0, v_0) \rangle$$

y

$$\mathbf{r}'_2(u_0) = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \langle x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), z_u(u_0, v_0) \rangle$$

donde el subíndice  $v$  indica que se ha derivado con respecto a la variable  $v$ , y el subíndice  $u$  indica que se ha derivado con respecto a la variable  $u$ . Como  $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$  y  $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$  son tangentes a  $\Gamma_{u_0}$  y  $\Gamma_{v_0}$ , respectivamente, en el punto  $P$ , también lo son a la superficie  $\sigma$  en el punto  $P$ . Por consiguiente, el vector  $\mathbf{n} = \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_u(u_0, v_0)$  es perpendicular a  $\sigma$  en el punto  $P$ , siempre y cuando

$\mathbf{r}_v(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$  (vea la figura (3,6)). Diremos que  $\sigma$  es *regular* en  $P$  si  $\mathbf{r}_v(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$ , y que  $\sigma$  es *regular*, si lo es en todos sus puntos.

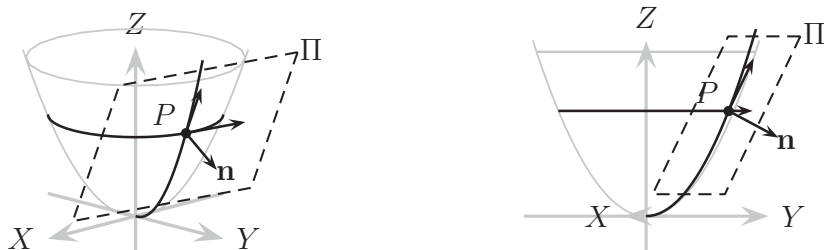


Figura 3.6

Si  $\sigma$  es una superficie regular parametrizada por una función vectorial de dos variables  $\mathbf{r} : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $P(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$  es un punto de  $\sigma$ , entonces  $\sigma$  tiene plano tangente en  $P$  y cuya ecuación es

$$(\mathbf{r}_v(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_u(u_0, v_0)) \cdot \langle x - x(u_0, v_0), y - y(u_0, v_0), z - z(u_0, v_0) \rangle = 0.$$

Al igual que en el caso de curvas en el espacio, se tiene el concepto de curvatura de una superficie. En realidad hay dos conceptos de curvatura que se conocen como *curvatura gaussiana*  $K(P)$  de  $\sigma$  en  $P$  y la *curvatura media*  $H(P)$  de  $\sigma$  en  $P$ . En el contexto de este curso no profundizaremos más en la geometría de superficies, pero si daremos las expresiones explícitas de estas dos curvaturas en términos de la parametrización de la superficie en los ejercicios.

### Movimiento en el espacio

En el contexto de la cinemática la posición de un objeto que se mueve en el espacio se puede modelar mediante una función vectorial  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $t \in \mathcal{I}$ , tomando el parámetro  $t$  como el transcurrir del tiempo.

Así, la derivada  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t)$  representa la *velocidad* del objeto que es la razón de cambio instantáneo de la posición en el instante de tiempo  $t$  y contiene la información de la dirección de su movimiento y la rapidez  $\|\mathbf{v}(t)\|$  con que lo hace en cada instante de tiempo  $t$ .

La derivada  $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{a}(t)$ , representa la *aceleración* del objeto que es la razón de cambio instantáneo de la velocidad en cada instante de tiempo  $t$  y contiene

la información de cómo cambian la dirección de movimiento y la rapidez con el transcurrir del tiempo en cada punto  $P(x(t), y(t), z(t))$  en el que se encuentra.

La razón de cambio instantáneo de la dirección del movimiento se denomina *aceleración normal*  $\mathbf{a}_N$  y la razón de cambio instantáneo de la rapidez del movimiento se denomina *aceleración tangencial*  $\mathbf{a}_T$ .

Para encontrar la descomposición de la aceleración en términos de la aceleración normal y la tangencial, se escribe la aceleración  $\mathbf{a}$  como combinación lineal de  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{N}$ . Es decir, debemos encontrar  $a_T$  y  $a_N$  tales que

$$\mathbf{a} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N}.$$

Resulta que  $a_T$  y  $a_N$  van a depender de la rapidez con que se mueve el objeto y de la curvatura de la curva. Esta descomposición se deja como ejercicio.

## EJERCICIOS

1. Sabiendo que  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(a+h) - \mathbf{r}(a)}{h}$ , utilice las propiedades de la adición de vectores, la multiplicación por escalar y (3.1) para demostrar (3.2).
2. Muestre que si las funciones vectoriales  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{s}$  son derivables en  $a$  entonces

$$(a) \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{s})}{dt}(a) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(a) \times \mathbf{s}(a) + \mathbf{r}(a) \times \frac{d\mathbf{s}}{dt}(a)$$

$$(b) \frac{d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})}{dt}(a) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(a) \cdot \mathbf{s}(a) + \mathbf{r}(a) \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt}(a)$$

$$(c) \frac{d(f\mathbf{r})}{dt}(a) = \frac{df}{dt}(a)\mathbf{r}(a) + f(a)\frac{d\mathbf{r}}{dt}(a)$$

3. El Teorema del Valor Medio no se satisface en general para funciones vectoriales. Muestre que para  $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$ , no existe un  $t$  en el intervalo  $(0, 2\pi)$  tal que

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{\mathbf{r}(2\pi) - \mathbf{r}(0)}{2\pi - 0}.$$

4. Para un vector  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ , la función  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{c}$  parametriza la recta que contiene al origen y tiene vector director  $\mathbf{c}$ .
- (a) ¿Qué curva es parametrizada por  $\mathbf{p}(t) = t^3\mathbf{c}$ ? Explique.
- (b) ¿Qué curva es parametrizada por  $\mathbf{q}(t) = e^t\mathbf{c}$ ? Explique.
- (c) Compare  $\mathbf{r}'(0)$  y  $\mathbf{p}'(0)$ . ¿Cómo explica la diferencia en las dos derivadas?

5. Muestre que  $\frac{d}{dt} \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ .

6. Muestre que  $\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q})) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) + \mathbf{r} \cdot \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{q} \right) + \mathbf{r} \cdot \left( \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)$ .

7. Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones en  $t = 3/2$ .

(a)  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \ln t, t \rangle$ .

(b)  $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{t^2 - 4}, t, 1/t \rangle$ .

8. Calcule la integral de la función  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 2\sin t, \ln t \rangle$  en el intervalo  $[1, \pi]$



9. Determine una función vectorial  $\mathbf{r}$  tal que  $\mathbf{r}'(t) = \langle \sin t, \cos t, t \rangle$  y  $\mathbf{r}(\pi/3) = \langle 2, 5, -1 \rangle$ .
10. Determine una función vectorial  $\mathbf{r}$  tal que  $\mathbf{r}''(t) = \langle t^3 + 2, t\sqrt{t^2 + 9}, t \rangle$ ,  $\mathbf{r}'(3) = \langle 2, 3, 0 \rangle$  y  $\mathbf{r}(0) = \langle 1, -1, 4 \rangle$ .
11. Determine tres parametrizaciones diferentes del segmento  $\mathbf{RS}$  si las coordenadas de  $R$  y de  $S$  son  $(1, 1, 0)$   $(-5, 5, 10)$ , respectivamente. Sugerencia: use tres parametrizaciones diferentes de la recta que pasa por los puntos  $R$  y  $S$ .
12. Determine tres parametrizaciones diferentes del segmento  $\mathbf{RS}$  si las coordenadas de  $R$  y de  $S$  son  $(1, -1, 7)$   $(3, -1, 4)$ , respectivamente.
13. Describa la curva de intersección de la superficie de la esfera de centro en el origen y radio 3 con el plano  $z = 2$  y determine una parametrización de la misma.
14. Describa la curva de intersección de las superficies cilíndricas de ecuaciones  $x^2 + y^2 = 4$  y  $y^2 + z^2 = 4$  y determine una parametrización de la misma.
15. Determine una parametrización de la recta de intersección de los planos  $x + y = 5$  y  $z - y = 2$ .
16. Determine una parametrización de la recta de intersección de los planos  $x + y - 3z = 5$  y  $x - 3y + z = 2$ .
17. Realice la siguiente construcción: Trace dos circunferencias con centro en el origen  $O$  de un plano cartesiano, una de radio  $a$  y otra de radio  $b$  con  $a > b$ , ubique un punto  $B$  sobre la circunferencia de radio  $b$  y trace la semirrecta  $OB$ . Nombre  $A$  el punto de intersección de la semirrecta con la circunferencia de radio  $a$  y  $\theta$  el ángulo formado por el semieje positivo  $X$  y la semirrecta  $OB$  medido en sentido positivo y en radianes. Trace la recta paralela al eje  $X$  que contiene al punto  $B$  y la recta paralela al eje  $Y$  que contiene al punto  $A$ , nombre  $P$  al punto de intersección de las dos rectas. Dibuje el lugar geométrico generado por el punto  $P$  al variar el ángulo  $\theta$ . Describa este lugar geométrico y parametrícelo usando como parámetro el ángulo  $\theta$ . Muestre que efectivamente es el lugar geométrico que describió.
18. Realice la siguiente construcción: Trace una circunferencia con centro en el punto  $(0, a)$  y radio  $a$ , los puntos de intersección entre la circunferencia

y el eje  $Y$  son el origen  $O$  y el punto  $A$ . Trace la recta  $L_1$ , paralela al eje  $X$  por el punto  $A$ , trace una semirrecta con origen el punto  $O$  y que forme un ángulo  $\theta$  con el semieje positivo  $X$ , Sea  $C$  la intersección entre la semirrecta y la recta  $L_1$ . Trace la recta  $L_2$  paralela al eje  $Y$  por el punto  $C$ . Sea  $B$  la intersección de la semirrecta con la circunferencia, trace la recta  $L_3$  paralela al eje  $X$  por el punto  $B$ . Sea  $P$  el punto de intersección de  $L_2$  y  $L_3$ . La curva generada por el punto  $P$  al variar  $\theta$  entre  $0$  y  $\pi$  se conoce como **Bruja de Agnesi**.

- (a) Introduzca un sistema de coordenada cartesianas rectangulares conveniente y parametrize la curva.
- (b) Muestre que una ecuación en coordenadas cartesianas rectangulares de la curva es  $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ .
19. Dadas una recta y una circunferencia de radio  $a$ , coplanares, tales que el centro de la circunferencia se encuentra a una distancia  $b$  de la recta.
- (a) Describa la superficie<sup>7</sup> que genera la circunferencia al ser rotada tomando como eje la recta.
- (b) Si se introduce un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares de tal manera que la recta coincida con el eje  $Z$ , parametrize la superficie del numeral anterior.
- (c) Parametrize el sólido interior a la superficie<sup>8</sup> generada para el caso en que  $b > a$ .
20. Parametrize la superficie plana limitada por las curvas dadas, de manera que el dominio de la parametrización sea una 2-celda.
- (a)  $y = x, y = 0, x = 2$
- (b)  $y = x^2, x = 0, y = 4$
- (c)  $y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}$
- (d)  $x = -\sqrt{1 - y^2}, x = 0$
- (e)  $y = 3x + 2, y = x + 4, x = 0$
- (f)  $y = x^2, y = \sqrt{x}$
- (g)  $x + y = 3, x + y = 7, x - y = 4, x - y = 1$ .

<sup>7</sup>Esta superficie es la superficie del toro.

<sup>8</sup>Este sólido se denomina "toro".

21. Sea  $\sigma$  la superficie de la esfera con centro en el origen y radio 2 y  $\sigma'$  la superficie cónica de ecuación  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , parametrize cada una de las siguientes regiones del espacio de manera que el dominio de los parámetros sea una 1-celda (intervalo), una 2-celda o una 3-celda, dependiendo de la naturaleza de la región<sup>9</sup>.
- La superficie  $\sigma$ .
  - El sólido limitado por  $\sigma$ , es decir, la esfera.
  - La parte de la superficie  $\sigma$  que está dentro de la superficie cónica  $\sigma'$ .
  - La parte de la superficie cónica  $\sigma'$  que se encuentra dentro de la superficie  $\sigma$ .
  - La curva de intersección de las dos superficies,  $\sigma$  y  $\sigma'$ .
  - El sólido que está dentro de  $\sigma$  y fuera de  $\sigma'$ .
22. Siendo  $\sigma$  la parte del plano de ecuación  $2x + 4y + 3z = 6$  que se encuentra en el primer octante, parametrize cada una de las siguientes regiones del espacio de manera que el dominio de la parametrización sea una 1-celda, una 2-celda o una 3-celda, dependiendo de la naturaleza de la región.
- La superficie  $\sigma$ .
  - El sólido limitado por la superficie  $\sigma$  y los planos coordenados.
  - El borde de  $\sigma$ .
23. Determine una parametrización de la superficie del cubo unidad en el primer octante, de tal manera que su dominio sea una 2-celda.
24. Usando las parametrizaciones de las superficies del ejercicio 21 determine la ecuación del plano tangente en los siguientes puntos:
- El punto  $(2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3)$  de la superficie  $\sigma$ .
  - El punto  $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$  de la parte de la superficie  $\sigma'$ .
25. Sea  $\Gamma$  la elipse de ecuación cartesiana  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

---

<sup>9</sup> $\sigma'$  no tiene dentro ni fuera porque no es una superficie cerrada. En este ejercicio, *fuera* se refiere a los puntos de coordenadas  $(x, y, z)$  que satisfacen la condición  $z < \sqrt{x^2 + y^2}$  y *dentro* hace referencia a los puntos de coordenadas  $(x, y, z)$  que satisfacen la condición  $z > \sqrt{x^2 + y^2}$ .

- (a) Determine una parametrización de  $\Gamma$ .
- (b) Determine las ecuaciones de las circunferencias osculadoras de  $\Gamma$  en los puntos  $(2, 0)$  y  $(1, \sqrt{27/4})$
- (c) Dibuje  $\Gamma$  y las circunferencias osculadoras del literal anterior.
26. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a cada una de las curvas  $\Gamma$  parametrizadas por  $\mathbf{r}$  en el punto en el que  $t = 0$ .
- (a)  $\mathbf{r}(t) = \langle t + 1, t^2 + 1, t^3 + 1 \rangle$     (b)  $\mathbf{r}(t) = \langle e^t + 1, e^{2t} + 1, e^{t^2} + 1 \rangle$
- (c)  $\mathbf{r}(t) = \langle \cos 2t, \sin 2t, t \rangle$     (d)  $\mathbf{r}(t) = \langle \sin 2t, 2 \sin^2 t, 2 \cos t \rangle$

27. Calcule la velocidad  $\mathbf{v}(t)$  y la aceleración  $\mathbf{a}(t)$  de un objeto con el vector posición  $\mathbf{r}(t)$  dado:
- (a)  $\mathbf{r}(t) = \langle t, t - \sin t, 1 - \cos t \rangle$     (b)  $\mathbf{r}(t) = \langle 3 \cos t, 2 \sin t, 1 \rangle$

28. Si  $\mathbf{v}$  representa la velocidad de un objeto en movimiento, podemos escribir  $\mathbf{v}(t) = \|\mathbf{v}\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{ds}{dt}(t)\mathbf{T}(t)$ , para explicitar la rapidez  $\frac{ds}{dt}$  y la dirección de movimiento  $\mathbf{T}(t)$ . Use la expresión  $\mathbf{v}(t) = \frac{ds}{dt}(t)\mathbf{T}(t)$  para calcular la derivada de  $\mathbf{v}$  y muestre que  $\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}(t)\mathbf{T}(t) + \left(\frac{ds}{dt}(t)\right)^2 \kappa \mathbf{N}(t)$  donde  $\kappa = \kappa(t)$  es la curvatura de la curva que sigue el objeto en su camino y  $\mathbf{N}(t)$  es el vector normal de la curva en el instante de tiempo  $t$ . Esto muestra que la aceleración normal está dada por

$$\mathbf{a}_N = (s')^2 \kappa \mathbf{N},$$

y la aceleración tangencial está dada por

$$\mathbf{a}_T = s'' \mathbf{T}.$$

29. Sea  $\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{\cos t}{\sqrt{1 + a^2 t^2}}, \frac{\sin t}{\sqrt{1 + a^2 t^2}}, \frac{-at}{\sqrt{1 + a^2 t^2}} \right\rangle$ , con  $a \neq 0$ .
- (a) Muestre que  $\|\mathbf{r}(t)\| = 1$  para todo  $t$ .
- (b) Muestre directamente que  $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$  para todo  $t$ .
30. Si  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$  para todo  $t$  en algún intervalo  $(a, b)$ , muestre que  $\mathbf{r}(t)$  es constante en  $(a, b)$ .

31. Considere una partícula de masa constante  $m$  con vector posición  $\mathbf{r}(t)$ , velocidad  $\mathbf{v}(t)$ , aceleración  $\mathbf{a}(t)$  y momento  $\mathbf{p}(t)$  en el instante  $t$ . El *momento angular*  $\mathbf{L}(t)$  de la partícula con respecto al origen en el instante  $t$  se define como  $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)$ . Si  $\mathbf{F}(t)$  es una fuerza actuando sobre la partícula en el instante  $t$ , se define el *torque*  $\mathbf{N}(t)$  con respecto al origen, actuando sobre la partícula por  $\mathbf{N}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}(t)$ . Muestre que  $\mathbf{L}'(t) = \mathbf{N}(t)$ .

32. Sea  $\mathbf{r}(t)$  el vector posición de una partícula que se mueve en  $\mathbb{R}^3$ . Muestre que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r})) = \|\mathbf{r}\|^2 \mathbf{a} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} - (\|\mathbf{v}\|^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\mathbf{r}.$$

Vea el ejercicio 37 de la Lección 1.

33. Sea  $\mathbf{r}(t)$  el vector posición en  $\mathbb{R}^3$  de una partícula que se mueve con rapidez constante  $c > 0$  en una circunferencia de radio  $a > 0$  en el plano  $XY$ . Muestre que  $\mathbf{a}(t)$  tiene sentido contrario al de  $\mathbf{r}(t)$  para todo  $t$ .

34. Calcule la longitud de arco de la curva parametrizada por  $\mathbf{r}(t)$  sobre el intervalo dado:

(a)  $\mathbf{r}(t) = \langle 3 \cos 2t, 3 \sin 2t, 3t \rangle$  en  $[0, \pi/2]$

(b)  $\mathbf{r}(t) = \langle (t^2 + 1) \cos t, (t^2 + 1) \sin t, 2\sqrt{2}t \rangle$  en  $[0, 1]$

(c)  $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos 3t, 2 \sin 3t, 2t^{3/2} \rangle$  en  $[0, 1]$

35. Determine la trayectoria  $\mathbf{r}(t)$  de un punto  $P$  del borde de un disco de radio  $a$  que rueda a lo largo de una recta  $L$  con una velocidad constante  $v$ .

36. Suponga que un objeto que sigue la trayectoria  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$  se sale por la tangente en  $t = \frac{7\pi}{3}$ . Determine la posición del objeto en  $t = 12$ .

37. Suponga que sobre el objeto, al que se hace referencia en el ejercicio anterior, se ejerce una fuerza  $\mathbf{F} = -10m\mathbf{i}$  (donde  $m$  es la masa del objeto) a partir del momento en que se sale por la tangente, determine la posición del objeto en cada instante de tiempo, la altura máxima del objeto sobre el plano  $x = 0$ , el punto de impacto con el plano  $x = 0$ .

38. Determine la posición, en cada instante de tiempo, de un objeto de masa  $m$  que se mueve con rapidez constante  $v$ , siguiendo una trayectoria circular de radio  $a$ .

39. Dado que la *fuerza centrípeta* es el producto de la masa por la aceleración de un objeto que semueve con rapidez constante siguiendo una trayectoria circular, determine la fuerza centrípeta de un objeto de 2 kg de masa que sigue una trayectoria circular de radio 9 m con una frecuencia de 4 revoluciones por segundo.
40. Si  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{B}$  son respectivamente los vectores tangente unitario, normal y binormal, muestre que

$$(a) \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$(b) \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{T} = 0$$

$$(c) \frac{d\mathbf{B}}{dt} \text{ es múltiplo escalar de } \mathbf{N}$$

41. Un objeto se mueve siguiendo la trayectoria  $\mathbf{r}(t) = 2\text{sen } t^2\mathbf{i} + 2\text{cos } t^2\mathbf{j}$ ,  $t \geq 0$ .
- (a) Determine el vector velocidad y la rapidez del objeto como funciones del parámetro  $t$ .
- (b) ¿En qué punto de la circunferencia debería liberarse el objeto con el fin de alcanzar un blanco situado en el punto  $(4, 0)$ .
- (c) ¿En qué instante de tiempo deberá ser liberada la partícula?
- (d) ¿Cuál es la velocidad y la rapidez en el instante de la liberación?
- (e) ¿En qué instante se alcanza el blanco?

42. Dada la trayectoria  $\mathbf{r}(t) = t^4\mathbf{i} + \text{cos } t^2\mathbf{j} + (t^2 - 1)\mathbf{k}$  determine las ecuaciones de la recta tangente, el plano normal y el plano osculador, así como el radio y centro de la circunferencia osculadora, en el punto  $(\pi^2, -1, \pi - 1)$ .

43. Sea  $\mathbf{r}$  una parametrización de una curva suave  $\Gamma$  tal que  $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$  para todo  $t$ . Muestre que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|} \right) = \frac{\mathbf{r}(t) \times (\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}(t))}{\|\mathbf{r}(t)\|^3}.$$

Ayuda: Para calcular  $\frac{d}{dt} (\|\mathbf{r}(t)\|)$ , calcule de dos formas la derivada de  $\|\mathbf{r}(t)\|^2$  y luego use el ejercicio 37 de la Lección 1.

44. Sea  $\mathbf{r}$  una parametrización de una curva suave  $\Gamma$  tal que  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$  para todo  $t$  y  $\mathbf{T}$  es el *vector tangente unitario*. Muestre que

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times (\mathbf{r}''(t) \times \mathbf{r}'(t))}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}.$$

Ayuda: use el ejercicio anterior.

45. Suponga que  $\mathbf{r}'(t)$  y  $\mathbf{r}''(t)$  no son paralelos, es decir  $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$ . Entonces, existe el *vector normal unitario*  $\mathbf{N}$ . Muestre que

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times (\mathbf{r}''(t) \times \mathbf{r}'(t))}{\|\mathbf{r}'(t) \times (\mathbf{r}''(t) \times \mathbf{r}'(t))\|}.$$

Ayuda: use el ejercicio anterior.

46. Si  $\mathbf{B}$  es el *vector binormal unitario*, muestre que

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}.$$

Ayuda: Use el ejercicio anterior y el ejercicio 37 de la Lección 1.

47. Determine los vectores  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{B}$  y la curvatura  $\kappa$  en cada punto de la hélice que está parametrizada por  $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$ .

48. Sean  $\mathbf{r}$  una parametrización de una curva suave  $\Gamma$  tal que  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$  para todo  $t$ ,  $\mathbf{T}(t)$  el vector tangente unitario,  $\mathbf{N}(t)$  el vector tangente unitario y  $\kappa(t)$  la curvatura. Demuestre que una parametrización de la circunferencia osculadora en el punto de  $\Gamma$  señalado por  $\mathbf{r}(t_0)$  es

$$\mathbf{s}(\theta) = \mathbf{r}(t_0) + \kappa(t_0)^{-1}(\cos \theta \mathbf{T}(t_0) + \sin \theta \mathbf{N}(t_0) + \mathbf{N}(t_0)),$$

$$\theta \in [0, 2\pi].$$

49. Muestre que la longitud de arco  $L$  de una curva cuyas coordenadas esféricas son  $\rho = \rho(t)$ ,  $\theta = \theta(t)$  y  $\phi = \phi(t)$  para  $t$  en un intervalo  $[a, b]$  es

$$L = \int_a^b \sqrt{\rho'(t)^2 + (\rho(t)^2 \sin^2 \phi(t)) \theta'(t)^2 + \rho(t)^2 \phi'(t)^2} dt.$$

50. Un objeto de masa  $m$  se desliza sin rozamiento sobre una rampa circular (cuarto de circunferencia de radio  $R$ ). Introduzca un sistema de coordenadas cartesianas conveniente y encuentre una función vectorial que describa la posición del objeto en función del tiempo transcurrido, si éste partió del reposo desde la parte más alta de la rampa.

51. Repita el ejercicio anterior pero suponiendo que hay una fuerza de rozamiento cuya magnitud es proporcional a la fuerza normal.
52. La curva  $\Gamma$  de Bézier pasa por cuatro puntos no colineales  $B_0, B_1, B_2$  y  $B_3$  en  $\mathbb{R}^3$  y está parametrizada mediante la función vectorial  $\mathbf{b}_0^3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , a partir de los vectores posición  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  de  $B_0, B_1, B_2$  y  $B_3$ , respectivamente, que está definida mediante el siguiente procedimiento:

Se definen las funciones vectoriales:

- i.  $\mathbf{b}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1$
- ii.  $\mathbf{b}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2$
- iii.  $\mathbf{b}_2^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_2 + t\mathbf{b}_3$

A partir de las anteriores se definen las funciones vectoriales

- i.  $\mathbf{b}_0^2(t) = (1-t)\mathbf{b}_0^1(t) + t\mathbf{b}_1^1(t)$
- ii.  $\mathbf{b}_1^2(t) = (1-t)\mathbf{b}_1^1(t) + t\mathbf{b}_2^1(t)$

Por último, a partir de las anteriores se define la función vectorial  $\mathbf{b}_0^3$  que parametriza a  $\Gamma$

$$\mathbf{b}_0^3(t) = (1-t)\mathbf{b}_0^2(t) + t\mathbf{b}_1^2(t)$$

- (a) Muestre que  $\mathbf{b}_0^3(t) = (1-t)^3\mathbf{b}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{b}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{b}_2 + t^3\mathbf{b}_3$ .
  - (b) Escriba la expresión explícita de la parametrización de la curva de Bézier para los puntos  $B_0 = (0, 0, 0)$ ,  $B_1 = (0, 1, 1)$ ,  $B_2 = (2, 3, 0)$ ,  $B_3 = (4, 5, 2)$ , y represéntela usando un programa graficador.
53. Sea  $\sigma$  una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$  parametrizada por una función vectorial de dos variables  $\mathbf{r} : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\mathbf{r}(u, v) = \langle x(u, v), y(u, v), z(u, v) \rangle$ , y  $P(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$  un punto de la superficie. Consideremos el vector unitario normal a  $\sigma$  en  $P$  dado por

$$\mathbf{N}(u_0, v_0) = \frac{\mathbf{r}_v(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_u(u_0, v_0)}{\|\mathbf{r}_v(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\|}.$$

Entonces, la curvatura gaussiana de  $\sigma$  en  $P$  está dada por

$$K(P) = \frac{(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_{uu})(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_{vv}) - \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_{uv}}{\|\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u\|^2},$$

todas las funciones calculadas en  $(u_0, v_0)$ . Por otro lado, la curvatura media de  $\sigma$  en  $P$  está dada por

$$H(P) = \frac{\|\mathbf{r}_v\|^2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_{uu}) + \|\mathbf{r}_u\|^2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_{vv}) - 2(\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v)(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_{uv})}{2\|\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u\|^2},$$



todas las funciones calculadas en  $(u_0, v_0)$ .

- (a) Calcule las curvaturas gaussiana y media de un plano.
- (b) Calcule las curvaturas gaussiana y media de la superficie de una esfera.
- (c) Defina *esfera osculadora* de una superficie en un punto.
- (d) Encuentre la esfera osculadora de un paraboloides en su vértice.

54. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie parametrizada por

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle (2 + \sin v) \cos u, (2 + \sin v) \sin u, \cos v \rangle,$$

$u \in [0, 2\pi]$ ,  $v \in [0, 2\pi]$ , en el punto que señala  $\mathbf{r}(0, 0)$ . ¿Qué superficie parametriza  $\mathbf{r}$ ?

55. Determine el vector normal unitario y la ecuación del plano tangente a la superficie parametrizada por

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle 3 \cos u, 3 \sin u, v \rangle,$$

$u \in [0, 2\pi]$ ,  $v \in [-4, 4]$ , en el punto  $\mathbf{r}(\pi, 2)$ , ¿Qué superficie parametriza  $\mathbf{r}$ ? Determine todos los puntos de intersección del plano tangente con la superficie.

56. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie parametrizada por  $\mathbf{r}(u, v)$  en el punto  $\mathbf{r}(p, q)$  para  $(p, q)$  dado.

- (a)  $\mathbf{r} = \langle v \sin u, v \cos u, v \rangle$ ,  $(p, q) = (\pi/4, 2)$ .
- (b)  $\mathbf{r} = \langle \cos u, \sin u, v \rangle$ ,  $(p, q) = (\pi/4, 3)$
- (c)  $\mathbf{r} = \langle v \sin u, v \cos u, uv \rangle$ ,  $(p, q) = (\pi/3, 1)$
- (d)  $\mathbf{r} = \langle \sin v \sin u, \cos v \sin u, \cos u \rangle$ ,  $(p, q) = (\pi/4, \pi/4)$
- (e)  $\mathbf{r} = \langle e^v \sin u, e^v \cos u, e^v \rangle$ ,  $(p, q) = (\pi, 1)$
- (f)  $\mathbf{r} = \langle v \cos u, v \sin u, v \rangle$ ,  $(p, q) = (\pi/2, 1)$
- (g)  $\mathbf{r} = \langle \cos u, \sin u, v \rangle$ ,  $(p, q) = (\pi/2, 1)$
- (h)  $\mathbf{r} = \langle v \sin u, v^2, v \cos u \rangle$ ,  $(p, q) = (\pi/4, 1)$
- (i)  $\mathbf{r} = \langle \sin v \sin u, \cos v \sin u, \cos u \rangle$ ,  $(p, q) = (\pi/3, \pi/4)$
- (j)  $\mathbf{r} = \langle \sin u \cosh v, \sin u \sinh v, \cos u \rangle$ ,  $(p, q) = (\pi, \ln 2)$

57. La gráfica de una función  $f$  de dos variables es una superficie que tiene ecuación  $z = f(x, y)$  y se puede parametrizar usando la parametrización  $\mathbf{r}(u, v) = \langle u, v, f(u, v) \rangle$ . Parametrice la gráfica de cada una de las siguientes funciones y determine la ecuación del plano tangente a la gráfica en el punto de coordenadas  $(a, b, f(a, b))$  indicado (considere como dominio de  $f$  una 2-celda que contenga al punto  $(a, b)$ ).

(a)  $f(x, y) = x^2 - y$ ,  $(a, b, f(a, b)) = (2, 1, 3)$

(b)  $f(x, y) = 3x + 2y + 1$ ,  $(a, b, f(a, b)) = (0, 0, 1)$

(c)  $f(x, y) = xe^{xy}$ ,  $(a, b, f(a, b)) = (2, 0, 2)$

(d)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $(a, b, f(a, b)) = (1, 1, 2)$

(e)  $f(x, y) = xy$ ,  $(a, b, f(a, b)) = (1, 1, 1)$

(f)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ,  $(a, b, f(a, b)) = (1, 1, \ln 2)$



## LECCIÓN 4

---

### Funciones de varias variables

---

Las funciones de las que trata esta lección son funciones definidas en algún subconjunto  $D$  de  $\mathbb{R}^n$  y que toman valores en  $\mathbb{R}$ . Una tal función  $f$  es una función escalar que a cada punto  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $D$  le asigna un número real  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . En este texto, solamente estudiaremos funciones escalares de dos o tres variables, es decir, funciones definidas en subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  o de  $\mathbb{R}^3$  que toman valores en  $\mathbb{R}$ . Los dominios de estas funciones pueden ser de diferente naturaleza. Sin embargo, hay ciertos dominios que juegan un papel muy importante en el estudio de propiedades de estas funciones. Estudiaremos algunas características de dichos conjuntos en  $\mathbb{R}^2$ . (Todas las definiciones se extienden de manera natural a  $\mathbb{R}^3$ ).

Dado un subconjunto  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  definiremos el *interior* de  $D$ , el *exterior* de  $D$  y la *frontera* de  $D$  usando el concepto de vecindad de un punto en el plano.

Si  $P$  es un punto de  $\mathbb{R}^2$  y  $\alpha$  es un número real positivo, la *vecindad* de  $P$  de tamaño  $\alpha$ , es el conjunto

$$V(P, \alpha) = \{Q \in \mathbb{R}^2 : d(P, Q) < \alpha\},$$

cuya representación en el plano es un disco con centro en  $P$  y radio  $\alpha$ , excluyendo los puntos de la circunferencia. Un punto  $P$  es un *punto interior* de  $D$  si existe una vecindad de  $P$  que esté contenida en  $D$ . El conjunto de todos los puntos interiores de un conjunto  $D$  se denomina el *interior* de  $D$  y

se escribe  $\text{int}D$ . Un punto  $P$  es un *punto exterior de  $D$*  si existe una vecindad de  $P$  que no contiene puntos de  $D$ . El conjunto de todos los puntos exteriores de un conjunto  $D$  se denomina el *exterior de  $D$*  y se escribe  $\text{ext}D$ . Un punto  $P$  es un *punto frontera de  $D$*  si toda vecindad de  $P$  contiene puntos de  $D$  y puntos que no están en  $D$ . El conjunto de todos los puntos frontera de un conjunto  $D$  se denomina la *frontera de  $D$*  y se escribe  $\text{fro}D$ .

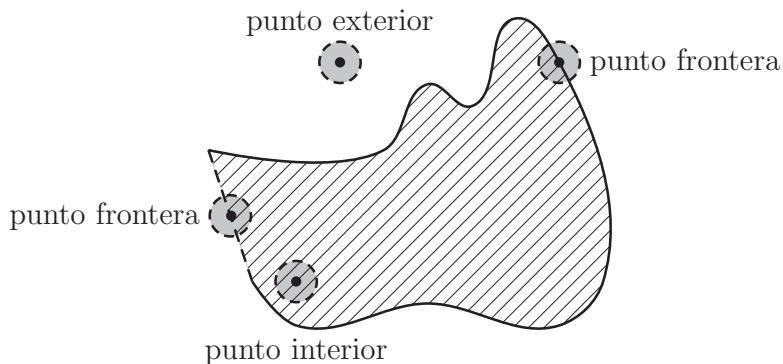


Figura 4.1

Todo subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  tiene interior, exterior y frontera, que son subconjuntos disjuntos de  $\mathbb{R}^2$  y cuya unión es todo  $\mathbb{R}^2$ .

Un conjunto  $D$  es *abierto* si todos sus puntos son interiores, es decir, si  $D \subset \text{int}D$ .  $D$  es *cerrado* si contiene todos sus puntos frontera, es decir si  $\text{fro}D \subset D$ .  $D$  es *acotado* si existe un punto  $P$  y una vecindad  $V(P, \alpha)$  tal que  $D \subset V(P, \alpha)$ .

En la mayoría de los libros de texto las funciones se representan mediante su regla de asignación y no se hace mención explícita de su dominio. En el caso de las funciones con dominio en  $\mathbb{R}^2$  y valores reales, el *dominio* de  $f$  es el conjunto de puntos  $(x, y)$  para los cuales el valor  $f(x, y)$  está bien definido, es decir, para los cuales  $f(x, y)$  es un número real. Explícitamente:

$$\text{dom}f = \{(x, y) : f(x, y) \in \mathbb{R}\}.$$

La *imagen* de  $f$  es el conjunto de todos los valores que toma la función al evaluarla en todos los puntos de su dominio. Es decir,

$$\text{im}f = \{f(x, y) : (x, y) \in \text{dom}f\}.$$

La *gráfica* de  $f$  es el conjunto

$$\text{gr}f = \{(x, y, z) : (x, y) \in \text{dom}f \text{ y } z = f(x, y)\}.$$

En general, para las funciones que se tratarán en el texto, la representación del conjunto  $\text{gr}f$  en el espacio es una superficie de ecuación  $z = f(x, y)$ . Por otro lado, si se tiene una ecuación de la forma  $z = f(x, y)$ , su gráfica (que en general es una superficie), es la gráfica de la función  $f$ .

Para hacer el bosquejo de la gráfica de una función se puede recurrir a la técnica de las trazas, que se usó para graficar una superficie a partir de su ecuación. En este caso, las trazas que se obtienen al intersectar la gráfica de la función  $f$  con planos paralelos al plano  $XY$  (esto es planos con ecuación  $z = k$ ) toman el nombre de *curvas de nivel*<sup>1</sup> de la función  $f$ :

$$N_k f = \{(x, y) : f(x, y) = k\} \text{ es la curva de nivel } k \text{ de } f,$$

que tiene ecuación  $f(x, y) = k$ . Nótese que el conjunto  $N_k f$  es diferente de vacío si y sólo si  $k \in \text{im}f$ .

La representación de varias de las curvas de nivel de  $f$  en el plano  $XY$  es un *mapa de contorno* de  $f$  y nos permite construir la gráfica de la función.

Veamos el siguiente ejemplo. Dada la función  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ,  $f(x, y) \in \mathbb{R}$  si y sólo si  $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ , es decir si  $x^2 + y^2 \leq 1$ , así

$$\text{dom}f = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

que es el disco cerrado con centro en  $(0, 0)$  y radio 1.

Las curvas de nivel de  $f$ ,

$$N_k f = \{(x, y) : \sqrt{1 - x^2 - y^2} = k\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1 - k^2\},$$

si  $0 \leq k \leq 1$  son circunferencias con centro en  $(0, 0)$  y radio  $\sqrt{1 - k^2}$ , de donde, un mapa de contorno de  $f$  es:

---

<sup>1</sup>Si la función  $f$  es una función de tres variables,  $N_k = f^{-1}\{k\} = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = k\}$  es la superficie de nivel  $k$  de  $f$ . La ecuación de esta superficie es  $f(x, y, z) = k$

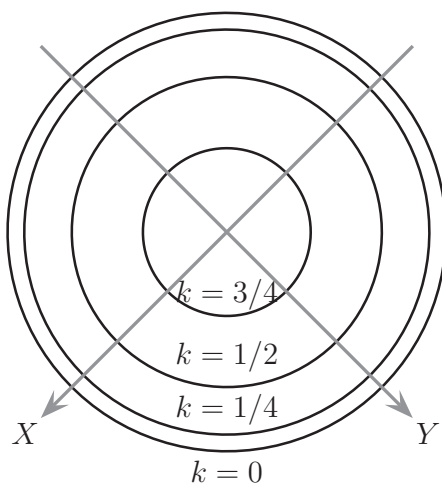


Figura 4.2

De aquí, se puede reconstruir la gráfica de la función  $f$ , que no es otra cosa que la superficie de una semiesfera (ver figura 4.3).

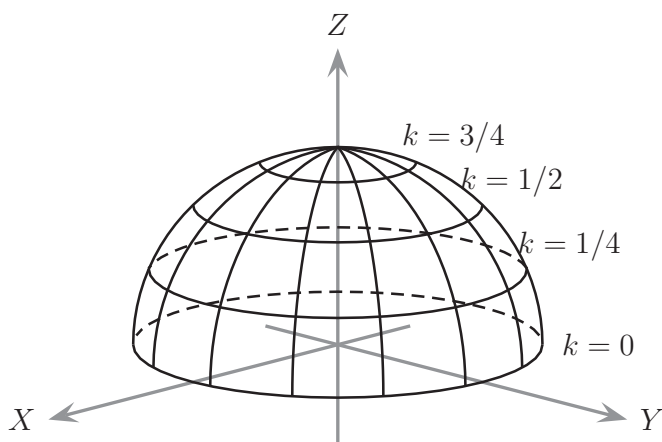


Figura 4.3

Veamos ahora las características del dominio de  $f$ . Se puede verificar que si  $D = \text{dom} f$ :

1. Todos los puntos  $(x, y)$  tales que  $x^2 + y^2 < 1$  son puntos interiores de  $D$ ,

es decir,

$$\text{int}D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

2. Todos los puntos  $(x, y)$  tales que  $x^2 + y^2 > 1$  son puntos exteriores de  $D$ , es decir,

$$\text{ext}D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}.$$

3. Todos los puntos  $(x, y)$  tales que  $x^2 + y^2 = 1$  son puntos frontera de  $D$ , es decir,

$$\text{fro}D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Como todos los puntos frontera de  $D$  pertenecen a  $D$ , se tiene que  $D$  es un conjunto cerrado. Por otro lado,  $D$  está contenido en la vecindad con centro en  $(0, 0)$  y tamaño 2, por lo tanto  $D$  es un conjunto acotado.  $D$  no es un conjunto abierto ya que hay puntos de  $D$  que no son interiores (¿cuáles?)

## Límites

Para extender el concepto de límite, se usará la idea de los límites laterales de funciones de una sola variable. Recuerde que el límite de una función de una variable en un punto existe si y sólo si los límites laterales (por la izquierda y por la derecha) existen y son iguales. Es decir, para estudiar el límite de la función en un punto, se hacen acercamientos al punto por dos caminos posibles: por la izquierda y por la derecha. Esta idea es un poco más complicada para funciones de dos (o más) variables, ya que hay muchísimas formas de acercarse a un punto en el plano. Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $D \subset \mathbb{R}^2$  y  $P(a, b)$  un punto en el plano, que no necesariamente pertenece a  $D$ . Un acercamiento a  $P$  en  $D$  es una función vectorial  $\mathbf{a}_P : [-1, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$  con las siguientes dos propiedades:

- i) Para cada  $t \in [-1, 0)$ ,  $\mathbf{a}_P(t)$  señala un punto de  $D - \{P\}$ ,
- ii)  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \mathbf{a}_P(t) = \mathbf{OP}$ .

Obsérvese que el ítem (i) dice que un acercamiento es un camino que conduce a  $P$  usando puntos de  $D$  y el ítem (ii) dice que  $\lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = a$  y  $\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = b$ . Ahora, si existe por lo menos un acercamiento a  $P$  podemos definir el límite de  $f$  cuando nos acercamos a  $P(a, b)$ . Diremos que  $L$  es el límite de  $f$  cuando  $(x, y)$  se acerca a  $(a, b)$  y escribiremos  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ , si para todo acercamiento  $\mathbf{a}_P$  se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(\mathbf{a}_P(t)) = L.$$



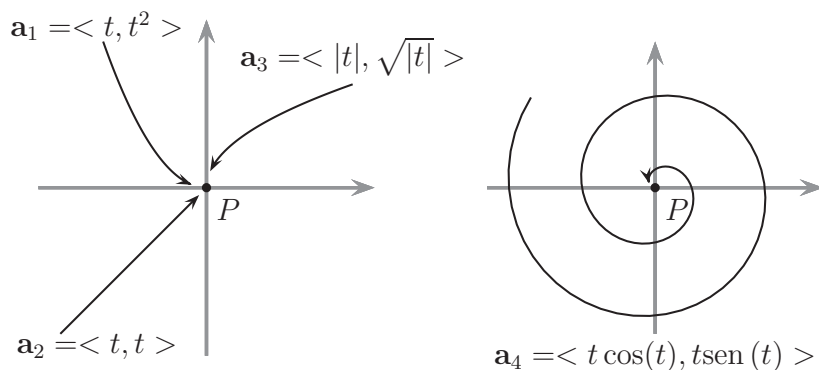


Figura 4.4

Si para algún acercamiento  $\mathbf{a}_P$  se tiene que  $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(\mathbf{a}_P(t)) = L$ , no se puede asegurar que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$  exista, pero se puede asegurar que si existiese, éste debería ser  $L$ . Por ejemplo, para la función  $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$  y el acercamiento a  $P(0,0)$ ,  $\mathbf{a}_P(t) = \langle t, t \rangle$ , se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(\mathbf{a}_P(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{3t^3}{2t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{3t}{2} = 0.$$

Este cálculo no demuestra la existencia del límite. Sin embargo, dice que si existiese el límite debería ser 0. Para ver que el límite efectivamente existe y es 0, sea  $\mathbf{a}_P(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$  cualquier acercamiento a  $P$ , es decir, el acercamiento es tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = 0.$$

Entonces,

$$0 \leq |f(\mathbf{a}_P(t))| = \left| \frac{3x(t)^2y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} \right| = 3 \frac{x(t)^2}{x(t)^2 + y(t)^2} |y(t)| \leq 3|y(t)|$$

Usando el Teorema del Emparedado y el hecho de que  $\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = 0$ , se tiene que  $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(\mathbf{a}_P(t)) = 0$  y por consiguiente  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ .

De acuerdo con la definición de límite,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$  no existirá si encontramos algún acercamiento  $\mathbf{a}_P$  para el que  $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(\mathbf{a}_P(t))$  no exista, o si encontramos por lo menos dos acercamientos  $\mathbf{a}_{1P}$  y  $\mathbf{a}_{2P}$  para los que

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(\mathbf{a}_{1P}(t)) \neq \lim_{t \rightarrow 0^-} f(\mathbf{a}_{2P}(t))$$

Por ejemplo, si  $f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  y se consideran los acercamientos a  $P(0, 0)$ ,  $\mathbf{a}_{1P}(t) = \langle t, 0 \rangle$  y  $\mathbf{a}_{2P}(t) = \langle t, t \rangle$ , se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(\mathbf{a}_{1P}(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0 \neq \lim_{t \rightarrow 0^-} f(\mathbf{a}_{2P}(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2},$$

lo que muestra que el límite no existe.

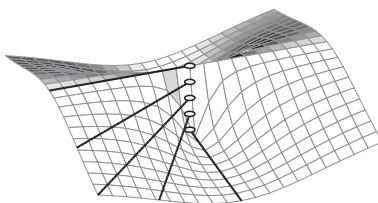


Figura 4.5: Esta es la gráfica de la función  $f(x, y) = (xy)/(x^2 + y^2)$ . Las líneas oscuras representan el comportamiento de  $f$  en acercamientos de la forma  $\langle t, mt \rangle$ . Obsérvese que  $f(t, mt) = m/(1 + m^2)$ .

Una consecuencia inmediata de esta definición de límite, es que todas las propiedades de los límites que se estudiaron en cursos anteriores de cálculo son válidas: límite de una suma es la suma de los límites, límite de un producto es el producto de los límites, etc. Además, el concepto de continuidad se extiende a funciones de varias variables de manera natural.

Sea  $f$  una función de  $D \subset \mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$ ,  $P(a, b) \in D$  y suponga que existe por lo menos un acercamiento a  $P$  en  $D$ . La función  $f$  es continua en  $P$  si y solamente si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$ . Si no existe ningún acercamiento a  $P$  aceptaremos que  $f$  es continua en  $P$ . Esta definición trae como consecuencia que la continuidad de dos funciones en un punto implica la continuidad de la suma y del producto en ese punto y las demás propiedades de las funciones continuas que se estudiaron en cursos anteriores de cálculo. Así, por ejemplo,

1. Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por  $f(x, y) = x$ ,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = a,$$

porque si  $\mathbf{a}_P(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$  es un acercamiento a  $P(a, b)$ , es decir,  $\lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = a$  y  $\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = b$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(\mathbf{a}_P(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(x(t), y(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = a.$$

Obsérvese que como  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = a = f(a, b)$ , la función  $f$  es continua en  $(a, b)$ .

2. Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por  $f(x, y) = y$ ,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = b = f(a, b).$$

Es decir,  $f$  es continua en  $(a, b)$

3. Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función polinómica, es decir,  $f(x, y)$  es la suma de términos de la forma  $cx^n y^m$ ,  $f$  es continua en  $(a, b)$  pues ésta se obtiene de productos y sumas de las funciones de los ejemplos 1 y 2 que son continuas en  $(a, b)$ .
4. Las funciones racionales, es decir, cocientes de funciones polinómicas, son continuas en todo punto de su dominio. Esto es una consecuencia de la continuidad del cociente, cuando el numerador y el denominador lo son.

## EJERCICIOS

1. Defina los conceptos de vecindad, interior, exterior, frontera, conjunto abierto, conjunto cerrado y conjunto acotado en  $\mathbb{R}^3$ .
2. Sea  $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$ 
  - (a) Evalúe  $f(1, 1)$  y  $f(e, 1)$ .
  - (b) Determine el dominio de  $f$ .
  - (c) Determine, si existen, puntos del dominio cuya imagen sea cada uno de los siguientes números reales: 0, 3, 10.000, -1.325.478,  $\alpha$ .
  - (d) Determine la imagen de  $f$ .
  - (e) Represente gráficamente el dominio  $D$  de  $f$  y determine si éste es abierto, es cerrado, no es ni abierto ni cerrado y si es acotado. Justifique su respuesta.
3. Sea  $f(x, y) = e^{x^2-y}$ 
  - (a) Evalúe  $f(2, 4)$  y  $f(0, 1)$ .
  - (b) Determine el dominio de  $f$ .
  - (c) Determine, si existen, puntos del dominio cuya imagen sea cada uno de los siguientes números reales: 0, 1, 10.000, -20,  $\alpha$ .
  - (d) Determine la imagen de  $f$ .
  - (e) Represente gráficamente el dominio  $D$  de  $f$  y determine si éste es abierto, es cerrado, no es ni abierto ni cerrado y si es acotado. Justifique su respuesta.
4. Sea  $g(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ 
  - (a) Evalúe  $g(1, 2)$  y  $g(0, 1)$ .
  - (b) Determine el dominio de  $g$ .
  - (c) Determine, si existen, puntos del dominio cuya imagen sea cada uno de los siguientes números reales: 0, 3, -1, 1235,  $-\pi$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\alpha$ .
  - (d) Determine la imagen de  $g$ .
  - (e) Represente gráficamente el dominio  $D$  de  $g$  y determine si éste es abierto, es cerrado, no es ni abierto ni cerrado y si es acotado. Justifique su respuesta.

5. Sea  $g(x, y) = \sqrt{(xy^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4)}$
- (a) Evalúe  $g(1, 2)$  y  $g(-1, 1.5)$ .
  - (b) Determine el dominio de  $g$ .
  - (c) Determine, si existen, puntos del dominio cuya imagen sea cada uno de los siguientes números reales:  $0, 3, -1, 1235, \pi, \sqrt{2}, \alpha$ .
  - (d) Determine la imagen de  $g$ .
  - (e) Represente gráficamente el dominio  $D$  de  $g$  y determine si éste es abierto, es cerrado, no es ni abierto ni cerrado y si es acotado. Justifique su respuesta.
6. Sea  $f(x, y, z) = x^2 \ln(x - y + z)$
- (a) Evalúe  $f(3, 6, 4)$
  - (b) Determine el dominio  $D$  de  $f$ .
  - (c) Determine la imagen de  $f$ .
  - (d) Determine si el dominio  $D$  de  $f$  es abierto, es cerrado, no es ni abierto ni cerrado y si es acotado. Justifique su respuesta.
7. Sea  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}}$
- (a) Evalúe  $f(1, 3, -4)$
  - (b) Determine el dominio  $D$  de  $f$ .
  - (c) Determine la imagen de  $f$ .
  - (d) Determine si el dominio  $D$  de  $f$  es abierto, es cerrado, no es ni abierto ni cerrado y si es acotado. Justifique su respuesta.
8. Determine el dominio de  $f$  y diga si es cerrado, abierto, ni cerrado ni abierto, acotado o no acotado, justificando su respuesta:
- (a)  $f(x, y) = \sqrt{x + y}$
  - (b)  $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
  - (c)  $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$
  - (d)  $f(x, y) = \frac{x - 3y}{x + 3y}$
  - (e)  $f(x, y) = \frac{3x + 5y}{x^2 + y^2 - 4}$

- (f)  $f(x, y) = \sqrt{y-x} \ln(y+x)$   
 (g)  $f(x, y) = xy\sqrt{x^2+y}$   
 (h)  $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2-1} + \ln(4-x^2-y^2)$   
 (i)  $f(x, y, z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$   
 (j)  $f(x, y, z) = \ln(16-4x^2-4y^2-z^2)$   
 (k)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{1}{x^2}$   
 (l)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$   
 (m)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \left( \frac{x^2}{y} \right)$   
 (n)  $f(x, y) = \frac{x^2 + 1}{y}$   
 (o)  $f(x, y, z) = \sin(xyz)$   
 (p)  $f(x, y, z) = \sqrt{(x-1)(yz-1)}$

9. Dé por lo menos dos acercamientos convenientes, calcule los límites al restringir la función a los acercamientos que dió. Determine el límite de las funciones si existen, o demuestre que el límite no existe

- (a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (5,-2)} (x^5 + 4x^3y - 5xy^2)$   
 (b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (6,3)} xy \cos(x-2y)$   
 (c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$   
 (d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2}$   
 (e)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{8x^2y^2}{x^4 + y^4}$   
 (f)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + xy^2}{x^2 + y^2}$   
 (g)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$   
 (h)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy + 1}{x^2 + y^2 + 1}$   
 (i)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$

- (j)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}$
- (k)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$
- (l)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy - 2y}{x^2 + y^2 - 4x + 4}$
- (m)  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (3,0,1)} e^{-xy} \sin(\pi z/2)$
- (n)  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$
- (o)  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz + xz}{x^2 + y^2 + z^2}$

10. Determine el dominio de la función, y diga si ésta es continua (en su dominio):

- (a)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y}$
- (b)  $f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2 + 1}$
- (c)  $f(x, y) = \arctan(x + \sqrt{y})$
- (d)  $f(x, y) = \ln(2x + 3y)$
- (e)  $f(x, y) = \sqrt{(x + y)} - \sqrt{(x - y)}$
- (f)  $f(x, y) = \sin^{-1}(x^2 + y^2)$
- (g)  $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 - z}$
- (h)  $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$
- (i)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- (j)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

11. Suponga que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$  y  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y)$  existen, y que  $k$  es un escalar. Demuestre que:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x, y) + g(x, y)] = \left[ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \right] + \left[ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) \right]$$

- (b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} k f(x, y) = k \left[ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \right]$
- (c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x, y)g(x, y)] = \left[ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \right] \left[ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) \right]$
- (d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y)}$  si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) \neq 0$
- (e) Si  $|f(x, y) - L| \leq g(x, y)$  para todo  $(x, y)$  y si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = 0$ , entonces  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ .

12. Calcule los siguientes límites, si existen. Si no existen, explique por qué.

- (a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos(xy)$                       (b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{xy}$
- (c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$                       (d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$
- (e)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$                       (f)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$
- (g)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$                       (h)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$
- (i)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4 \text{sen}(xy)}{x^2 + y^2}$                       (j)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{xy}\right)$
- (k)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{y}$                       (l)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos\left(\frac{1}{xy}\right)$

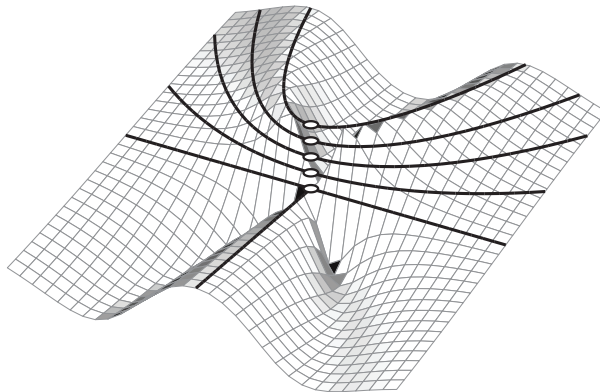


Figura 4.6: Esta es la gráfica de la función del problema 12 (d). Las líneas gruesas son trazas horizontales que muestran el comportamiento de la función cerca del punto  $(0, 0)$ .



13. Determine los valores de los enteros positivos  $p$ ,  $q$ ,  $r$  y  $s$  para los que el límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^p y^q}{x^r + y^s}$$

existe.

14. Muestre que  $f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}$ , para  $\sigma > 0$ , es constante en la circunferencia de radio  $r > 0$  centrada en el origen. Esta función se llama *Gaussian blur*, y se usa como filtro en los programas de procesamiento de imágenes para producir un efecto de “desenfoco”.
15. Suponga que  $f(x, y) \leq f(y, x)$  para todo  $(x, y)$  en  $\mathbb{R}^2$ . Muestre que  $f(x, y) = f(y, x)$  para todo  $(x, y)$  en  $\mathbb{R}^2$ .

16. **La advertencia de Thomas.** (Ver George B. Thomas, Jr., Cálculo en varias variables, 12 Ed., Addison-Wesley, 2010, página 763[3]) En algunas ocasiones se recurre a escribir la función en coordenadas polares para obtener el límite de  $f$  en  $(0, 0)$ , es decir, se escribe  $x = r \cos \theta$ , y  $y = r \sin \theta$  y se estudia el límite de la función cuando  $r$  tiende a 0. De acuerdo con la definición de límite de funciones de una sola variable, se trata de determinar si existe  $L$  tal que, para todo  $\epsilon > 0$  hay un  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |r| < \delta$ , se tenga  $|f(x(r, \theta), y(r, \theta)) - L| < \epsilon$ , para todo  $\theta$ . Por ejemplo,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \sin^2 \theta = 0.$$

Sin embargo, se debe comprobar esta afirmación recurriendo a la definición.

En este caso,  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = r \cos \theta \sin^2 \theta$ , si  $r \neq 0$ . Es decir, es necesario demostrar que, para todo  $\epsilon > 0$  hay un  $\delta > 0$  tal que, si  $0 < |r| < \delta$ , se tenga  $|r \cos \theta \sin^2 \theta - L| < \epsilon$ , para todo  $\theta$ . Se puede ver que esto es cierto, si tomamos  $\delta = \epsilon$  ya que  $|\cos \theta \sin^2 \theta| \leq 1$  para todo  $\theta$ .

- (a) Estudie el límite de  $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$  en  $(0, 0)$  cambiando las variables a coordenadas polares. ¿Qué se puede concluir en este caso?
- (b) Los ejemplos anteriores muestran que en algunas ocasiones cambiar a coordenadas polares puede ser útil. Sin embargo, hay que proceder con mucha cautela al usar este procedimiento ya que puede

conducir a errores si se usa de manera mecánica. Considere la función  $f$  definida por  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$  y estudie su límite en  $(0, 0)$  usando acercamientos y cambiando las variables a coordenadas polares. Compare sus respuestas y explique por qué la diferencia en los resultados (ver la Figura 4.6)

(c) Cambie las variables a coordenadas polares para mostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1.$$

17. El propósito de este ejercicio es de establecer la equivalencia de la definición clásica de límite de una función y la definición de límite presentada en el libro. Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , y sea  $P(a, b)$  un punto tal que exista un acercamiento a  $P$  en  $D$ <sup>2</sup>. Demuestre que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

si y sólo si, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para todo , se tiene que  $|f(x, y) - L| < \epsilon$ .

Primero, supóngase que dado  $\epsilon > 0$  se cuenta con  $\delta > 0$  tal que  $|f(x, y) - L| < \epsilon$ , siempre y cuando  $(x, y) \in D - \{(a, b)\}$  y  $\| \langle x - a, y - b \rangle \| < \delta$ . Considere un acercamiento  $\mathbf{a}_P(t) = (x(t), y(t))$  y use su definición para obtener  $\eta > 0$  para el que  $\| \langle x(t) - a, y(t) - b \rangle \| < \delta$ , siempre y cuando  $t \in [-1, 0)$  y  $|t| < \eta$ . Concluya que  $|f(x(t), y(t)) - L| < \epsilon$  si  $t \in [-1, 0)$  y  $|t| < \eta$ , es decir, que  $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(x(t), y(t)) = L$ .

Segundo, supóngase que existe  $\epsilon > 0$  tal que, para todo  $\delta > 0$ , se cuenta con  $(x_\delta, y_\delta) \in D$  tal que  $\| \langle x_\delta - a, y_\delta - b \rangle \| < \delta$  y  $|f(x_\delta, y_\delta) - L| \geq \epsilon$ . Use la sucesión  $(x_{1/n}, y_{1/n})$  para definir convenientemente un acercamiento  $\mathbf{a}_P$  para el que  $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(x(t), y(t)) \neq L$ .

---

<sup>2</sup>Se puede demostrar que los puntos que satisfacen esta condición son puntos de adherencia de  $D$ . No todo punto de  $D$  es necesariamente de adherencia, ni todo punto de adherencia de  $D$  es un punto de  $D$ .



---

## Diferenciabilidad de funciones de varias variables

---

Una de las herramientas más poderosas del cálculo es la diferenciación, con la que se estudia la forma en que los valores de una función varían con respecto a la variación de su variable, mediante el cálculo de la razón de cambio instantánea en puntos de su dominio. En la lección 3, se utilizó la diferenciación para estudiar el comportamiento de funciones vectoriales, lo que permitió estudiar el movimiento de objetos en el espacio y la geometría de las curvas y las superficies.

Para poder extender la diferenciación a funciones de varias variables se recurre al estudio de la variación de funciones en direcciones determinadas. De esta manera se le dará sentido a la razón de cambio instantánea de una función de varias variables en un punto de su dominio.

Con el propósito de precisar lo que significa la razón de cambio instantánea de una función en un punto en una dirección determinada se introduce a continuación el concepto de *paso por el punto  $P$*  en la dirección de un vector  $\mathbf{v}$ . Sean  $P(a, b)$  un punto en el plano,  $\epsilon$  un número real positivo y  $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$  un vector unitario. El *paso por el punto  $P$  en la dirección del vector  $\mathbf{v}$*  es la función vectorial

$$\mathbf{p}_P^{\mathbf{v}} : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dada por

$$\mathbf{p}_P^{\mathbf{v}}(t) = \langle a + v_1 t, b + v_2 t \rangle.$$

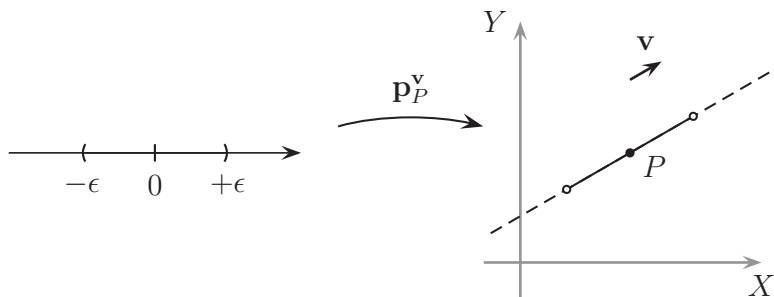


Figura 5.1: El paso  $\mathbf{p}_P^{\mathbf{v}}(t) = \langle a + v_1t, b + v_2t \rangle$  por el punto  $P(a, b)$  en la dirección del vector  $\mathbf{v}$ .

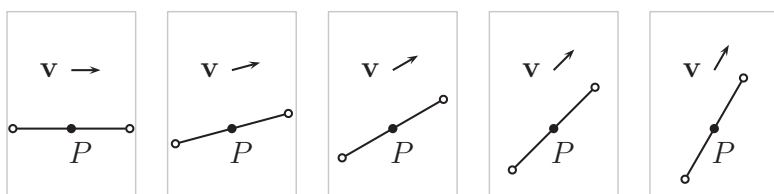


Figura 5.2: Pasos por el punto  $P$  en diferentes direcciones.

Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida en un subconjunto abierto  $D$  del plano,  $P(a, b)$  un punto de  $D$  y  $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$  un vector unitario. La *derivada direccional* de  $f$  en el punto  $P(a, b)$  en la dirección de  $\mathbf{v}$ , que se escribe como  $\frac{df}{d\mathbf{v}}(a, b)$  o como  $D_{\mathbf{v}}f(a, b)$ , se define por:

$$\frac{df}{d\mathbf{v}}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + v_1t, b + v_2t) - f(a, b)}{t}.$$

siempre y cuando este límite exista. Obsérvese que  $\frac{df}{d\mathbf{v}}(a, b)$  no es otra cosa que la derivada de  $f \circ \mathbf{p}_P^{\mathbf{v}}$  en  $t = 0$ :

$$\frac{df}{d\mathbf{v}}(a, b) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\mathbf{p}_P^{\mathbf{v}}(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + v_1t, b + v_2t).$$

Claramente  $(-\epsilon, \epsilon)$ , dominio del paso, debe ser tal que  $(a + v_1t, b + v_2t) \in D$  para todo  $t$ . Se define así la *función derivada direccional* de  $f$  en la dirección de  $\mathbf{v}$  que se nota como  $\frac{df}{d\mathbf{v}}$  cuyo dominio es el conjunto de todos los puntos  $(x, y)$  de  $D$  para los cuales existe la derivada de  $f$  en  $(x, y)$  en la dirección de  $\mathbf{v}$ .

Como para cada punto  $P(x, y)$  y dirección fija  $\mathbf{v}$  la derivada direccional es la derivada de una función de una sola variable, es natural que se cumplan todas las propiedades algebraicas de las derivadas de funciones de una variable. Por ejemplo, se tiene que

$$\frac{d(f+g)}{d\mathbf{v}}(x, y) = \frac{df}{d\mathbf{v}}(x, y) + \frac{dg}{d\mathbf{v}}(x, y)$$

y

$$\frac{d(fg)}{d\mathbf{v}}(x, y) = \frac{df}{d\mathbf{v}}g(x, y) + \frac{dg}{d\mathbf{v}}f(x, y).$$

Las derivadas direccionales de  $f$  en las direcciones de los vectores  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  se conocen como las *derivadas parciales* de  $f$  con respecto a  $x$  y a  $y$  respectivamente, y se suele escribir:

$$\frac{df}{d\mathbf{i}}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y), \quad \frac{df}{d\mathbf{j}}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y(x, y).$$

En el siguiente ejemplo se ilustra el cálculo de derivadas direccionales. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = x^3 - 2y^2$ . La derivada  $\frac{df}{d\mathbf{v}}(x, y)$ , si  $\mathbf{v} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$  y en cuyo caso  $\mathbf{p}_P^{\mathbf{v}}(t) = \left\langle x + \frac{\sqrt{2}}{2}t, y + \frac{\sqrt{2}}{2}t \right\rangle$ , es:

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\mathbf{v}}(x, y) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (x + \frac{\sqrt{2}}{2}t)^3 - 2(y + \frac{\sqrt{2}}{2}t)^2 \\ &= 3\frac{\sqrt{2}}{2}(x + \frac{\sqrt{2}}{2}t)^2 - 4\frac{\sqrt{2}}{2}(y + \frac{\sqrt{2}}{2}t) \Big|_{t=0} \\ &= 3\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 2\sqrt{2}y, \end{aligned}$$

Las funciones derivadas de  $f$  en las direcciones  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$ , son respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\mathbf{i}}(x, y) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (x+t)^3 - 2y^2 \\ &= 3(x+t)^2 \Big|_{t=0} \\ &= 3x^2 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{df}{dj}(x, y) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} x^3 - 2(y+t)^2 \\ &= -4(y+t)|_{t=0} \\ &= -4y = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).\end{aligned}$$

Como se verá más adelante todas las derivadas direccionales de funciones diferenciables se pueden expresar en términos de las derivadas parciales y de aquí su importancia.

Obsérvese que las derivadas parciales se pueden calcular derivando la función  $f$  como si fuese de una sola variable, fijando como constante la otra. Así por ejemplo, si se quiere calcular la derivada parcial con respecto a  $x$ , basta derivar con respecto a  $x$  fijando  $y$  como si fuese constante. Las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  de  $f$  se suelen escribir también como  $f_x$ ,  $f_y$ , respectivamente. En lo que sigue supondremos que las funciones  $f_x$  y  $f_y$  son continuas en  $D$ .

Considere un paso por un punto  $P(a, b)$  del dominio  $D$  de una función  $f$  en la dirección de un vector unitario  $\mathbf{v}$ . La curva de ecuaciones paramétricas

$$x = a + v_1t, \quad y = b + v_2t, \quad z = f(a + v_1t, b + v_2t), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

o de ecuación vectorial

$$\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(t) = \langle a + v_1t, \quad b + v_2t, \quad f(a + v_1t, b + v_2t) \rangle, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

está contenida en la gráfica de  $f$ . El vector tangente a esta curva en el punto  $Q(a, b, f(a, b))$  es  $\tilde{\mathbf{v}} = \left\langle v_1, v_2, \frac{df}{d\mathbf{v}}(a, b) \right\rangle$ . La pendiente de la recta tangente a la curva con respecto al vector  $\langle v_1, v_2, 0 \rangle$  es precisamente  $\frac{df}{d\mathbf{v}}(a, b)$ .

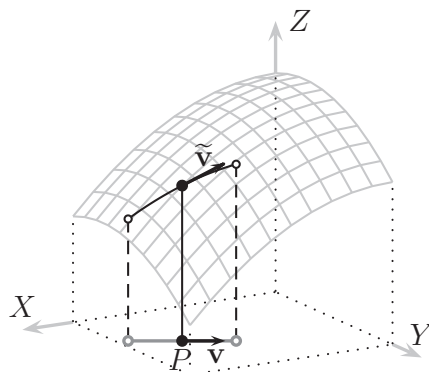


Figura 5.3: El vector  $\tilde{\mathbf{v}}$  tangente a la gráfica de  $f(x, y) = 4 - \frac{x^2+(y-1)^2}{8}$  definido por el paso  $\mathbf{p}_P^y$ .

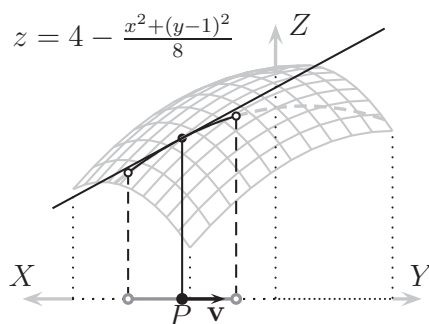


Figura 5.4

De interés particular son las curvas parametrizadas por

$$\mathbf{r}_i(t) = \langle a + t, b, f(a + t, b) \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_j(t) = \langle a, b + t, f(a, b + t) \rangle,$$

incluidas en la gráfica de  $f$  y que contienen el punto  $Q(a, b, f(a, b))$ . Tienen como vectores tangentes en el punto  $Q$  a los vectores  $\tilde{\mathbf{i}} = \langle 1, 0, f_x(a, b) \rangle$  y  $\tilde{\mathbf{j}} = \langle 0, 1, f_y(a, b) \rangle$  que son vectores directores de un plano que se define aquí como el plano tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $Q$ <sup>1</sup>. El vector  $\tilde{\mathbf{i}} \times \tilde{\mathbf{j}} = \langle -f_x(a, b), -f_y(a, b), 1 \rangle$  es un vector normal a dicho plano. Entonces, definimos el *plano tangente* a la gráfica de  $f$  en el punto  $Q$ , como el plano de ecuación

$$-f_x(a, b)(x - a) - f_y(a, b)(y - b) + (z - f(a, b)) = 0$$

<sup>1</sup>Los vectores directores son tangentes en el mismo punto a curvas incluidas en la gráfica de  $f$ .



o, lo que es equivalente, de ecuación

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Esta última ecuación corresponde a la ecuación de la gráfica de la *función afín* de  $f$  en el punto  $Q$ :<sup>2</sup>

$$L_f^{(a,b)}(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b),$$

que se usa frecuentemente para aproximar valores de  $f$  al hacer incrementos pequeños  $\Delta x$  y  $\Delta y$  en  $a$  y en  $b$  respectivamente. Es decir,  $L_f^{(a,b)}(a + \Delta x, b + \Delta y)$  se toma como valor aproximado de  $f(a + \Delta x, b + \Delta y)$ . La diferencia  $E$  entre estos dos valores, que se denomina *error de aproximación*, depende de  $f$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\Delta x$  y  $\Delta y$ :

$$\begin{aligned} E &= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - L_f^{(a,b)}(a + \Delta x, b + \Delta y) \\ &= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) - f_x(a, b)(\Delta x) - f_y(a, b)(\Delta y). \end{aligned}$$

Este error es pequeño cuando los incrementos  $\Delta x$  y  $\Delta y$  son pequeños, pero se requiere, para que la aproximación sea de utilidad, que éste sea mucho más pequeño en el siguiente sentido. Diremos que  $E$  es *bien pequeño* si existe  $\langle \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle$  tal que

1.  $E = \langle \Delta x, \Delta y \rangle \cdot \langle \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle$ .
2. Si  $\langle \Delta x, \Delta y \rangle \rightarrow \langle 0, 0 \rangle$  se tiene que  $\langle \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle \rightarrow \langle 0, 0 \rangle$ .

No todas las funciones se pueden aproximar mediante su función afín en  $(a, b)$  con un error *bien pequeño*. Las que satisfacen esta condición se llaman funciones diferenciables en  $(a, b)$ . En otras palabras, la función  $f$  es *diferenciable* en  $(a, b)$  si  $E$  es bien pequeño. En general, no es fácil encontrar  $\langle \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle$ , por lo que verificar si una función es diferenciable en  $(a, b)$  se vuelve una tarea dispendiosa. Sin embargo, se cuenta con el siguiente resultado:

*Si las derivadas parciales de  $f$  existen en una vecindad de  $(a, b)$  y son continuas en  $(a, b)$  entonces  $f$  es diferenciable en  $(a, b)$ .*

Se demostrará que, bajo estas condiciones, existe  $\langle \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle$  tal que  $E = \langle \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle \cdot \langle \Delta x, \Delta y \rangle$  y tal que

$$\lim_{\langle \Delta x, \Delta y \rangle \rightarrow \langle 0, 0 \rangle} \langle \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle = \langle 0, 0 \rangle .$$

---

<sup>2</sup>la gráfica de ésta función afín es precisamente el plano tangente

En efecto,

$$\begin{aligned}
 E &= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) - f_x(a, b)\Delta x - f_y(a, b)\Delta y \\
 &= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a + \Delta x, b) + f(a + \Delta x, b) - f(a, b) \\
 &\quad - f_x(a, b)\Delta x - f_y(a, b)\Delta y \\
 &= f_x(\alpha, b)\Delta x + f_y(a + \Delta x, \beta)\Delta y - f_x(a, b)\Delta x - f_y(a, b)\Delta y \\
 &= (f_x(\alpha, b) - f_x(a, b))\Delta x + (f_y(a + \Delta x, \beta) - f_y(a, b))\Delta y \\
 &= \langle f_x(\alpha, b) - f_x(a, b), f_y(a + \Delta x, \beta) - f_y(a, b) \rangle \cdot \langle \Delta x, \Delta y \rangle \\
 &= \langle \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle \cdot \langle \Delta x, \Delta y \rangle
 \end{aligned}$$

En el tercer renglón se ha usado el Teorema del Valor Medio para derivadas aplicado a las derivadas parciales de  $f$ . Como  $\alpha \rightarrow a$ , y  $\beta \rightarrow b$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta y \rightarrow 0$ , y  $f_x$  y  $f_y$  son continuas en  $(a, b)$ , se tiene que  $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \langle \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle = \langle 0, 0 \rangle$ , lo que demuestra la diferenciabilidad de  $f$  en  $(a, b)$ .

El resultado anterior es muy útil ya que, en general, la continuidad de las derivadas parciales es mucho más fácil de verificar que la pequeñez del error.

Mostrar que una función no es diferenciable en un punto no es una tarea sencilla a partir de la definición. El siguiente par de resultados proporcionan dos herramientas muy útiles para mostrar que una función no es diferenciable en un punto, en caso de que no lo sea: 1) Si una función  $f$  es diferenciable en un punto  $(a, b)$  entonces ésta debe ser continua en el mismo punto. En efecto, si  $f$  es diferenciable en  $(a, b)$ , podemos escribir

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + E,$$

Siendo  $E$  bien pequeño, se tiene que

$$E = \langle \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle \cdot \langle \Delta x, \Delta y \rangle$$

tiende a cero cuando  $\Delta x$  y  $\Delta y$  tienden a cero. Por consiguiente,

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b),$$

lo que muestra la continuidad de  $f$  en  $(a, b)$ .

Esto quiere decir, que si una función  $f$  no es continua en un punto  $(a, b)$ , ésta no puede ser diferenciable en ese punto. 2) Si  $f$  es diferenciable en  $(a, b)$ , entonces

$$0 \leq \frac{|E|}{\|\langle \Delta x, \Delta y \rangle\|} \leq \|\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle\|,$$

de donde, por el teorema de compresión, se tiene que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{|E|}{\|\langle \Delta x, \Delta y \rangle\|} = 0.$$

Esto quiere decir que, si

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{|E|}{\|\langle \Delta x, \Delta y \rangle\|} \neq 0,$$

$f$  no puede ser diferenciable en  $(a, b)$ .

La parte lineal de  $L_f^{(a,b)}$ , es decir  $f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y$  se conoce como *diferencial* de  $f$ , se escribe  $df$  y se usa para aproximar el incremento de  $f$  cuando se hacen incrementos  $\Delta x$  y  $\Delta y$  de  $a$  y de  $b$  respectivamente. Claramente,  $df$  es una muy buena aproximación de  $\Delta f = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$  si  $f$  es diferenciable en  $(a, b)$ . En efecto,

$$\begin{aligned} E &= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - L_f^{(a,b)}(a + \Delta x, b + \Delta y) \\ &= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) - f_x(a, b)\Delta x - f_y(a, b)\Delta y \\ &= \Delta f - df. \end{aligned}$$

Es decir,  $\Delta f = df + E$ .

Como ilustración del uso de las diferenciales, estimemos el error máximo al calcular el volumen de un cono cuyas dimensiones, radio  $r$  de 10cm y altura  $h$  de 25 cm, se han obtenido con un posible error de medición de 0.1cm. El error cometido en la medición del volumen  $V = \pi r^2 h/3$  es  $\Delta V$ , por lo que hemos visto, aproximadamente igual a

$$dV = V_r \Delta r + V_h \Delta h = (2\pi r h/3)\Delta r + (\pi r^2/3)\Delta h.$$

Como  $|\Delta r| \leq 0.1$  y  $|\Delta h| \leq 0.1$ . Entonces,

$$|dV| = |(2\pi r h/3)\Delta r + (\pi r^2/3)\Delta h| \leq \frac{500\pi}{3}(0.1) + \frac{100\pi}{3}(0.1) = 20\pi$$

Es decir, el máximo error cometido al calcular el volumen a partir de las mediciones es aproximadamente  $63 \text{ cm}^3$ .

Las derivadas parciales de una función  $f$  de varias variables son funciones de varias variables. Éstas, a su vez, podrían derivarse parcialmente, dando lugar a derivadas parciales de orden superior. A diferencia de las funciones de una sola variable, para las cuales hay a lo más una derivada de cada orden, las derivadas parciales de funciones de más de una variable tendrían derivadas parciales por cada una de sus variables. Por ejemplo, las derivadas parciales de segundo orden de una función  $f$  de dos variables serán:  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$  y  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$ .  
 ¿Cuántas derivadas de segundo orden podría tener una función de tres variables? ¿Cuántas derivadas de tercer orden podría tener una función de dos variables?

Un resultado importante en esta teoría con respecto a las derivadas de orden superior, es el siguiente:

*Cuando las derivadas parciales  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_{yx}$  y  $f_{xy}$  de una función  $f$  están definidas en un conjunto abierto  $D$  y son continuas, se tiene que las derivadas cruzadas son iguales, es decir, se tiene que  $f_{xy} = f_{yx}$ .*

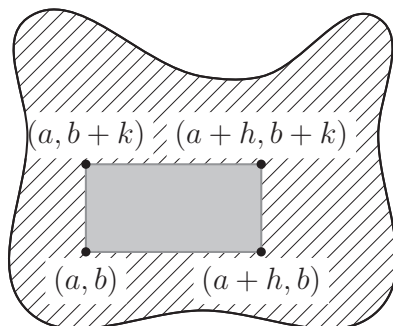


Figura 5.5

La justificación de esta afirmación se puede hacer mediante la aplicación sucesiva del Teorema del Valor Medio a ciertas funciones de una sola variable. Sea  $(a, b)$  un punto de  $D$  y sean  $h$  y  $k$  incrementos en la primera y segunda variables de modo que el rectángulo de vértices  $(a, b)$ ,  $(a, b+k)$ ,  $(a+h, b)$ ,

$(a + h, b + k)$  este contenido en  $D$  (vea la figura 5.5). Consideramos las funciones  $F(x) = f(x, b + k) - f(x, b)$  definida en el intervalo  $[a, a + h]$  y  $L(y) = f(a + h, y) - f(a, y)$  definida en el intervalo  $[b, b + k]$ .

Claramente,  $F(a + h) - F(a) = L(b + k) - L(b)$ , valor común que denotaremos  $\Omega$ . Además,  $F'(x) = f_x(x, b + k) - f_x(x, b)$  y  $L'(y) = f_y(a + h, y) - f_y(a, y)$ . Por el Teorema del Valor Medio, existen puntos  $\alpha_1$  en el intervalo abierto  $(a, a + h)$  y  $\beta_2$  en el intervalo abierto  $(b, b + k)$  tales que

$$F(a + h) - F(a) = F'(\alpha_1)h = (f_x(\alpha_1, b + k) - f_x(\alpha_1, b))h$$

y

$$L(b + k) - L(b) = L'(\beta_2)k = (f_y(a + h, \beta_2) - f_y(a, \beta_2))k.$$

Consideremos ahora las función  $G(y) = f_x(\alpha_1, y)$  definida en el intervalo  $[b, b + k]$  y  $M(x) = f_y(x, \beta_2)$  definida el intervalo  $[a, a + h]$ . Por el Teorema del Valor Medio, existen puntos  $\beta_1$  en el intervalo abierto  $(b, b + k)$  y  $\alpha_2$  en el intervalo abierto  $(a, a + h)$  tales que

$$G(b + k) - G(b) = G'(\beta_1)k = f_{xy}(\alpha_1, \beta_1)k.$$

y

$$M(a + h) - M(a) = M'(\alpha_2)h = f_{yx}(\alpha_2, \beta_2)h$$

Por lo anterior y teniendo en cuenta que  $\Omega = F(a + h) - F(a) = L(b + k) - L(b) = (G(b + k) - G(b))h = (M(a + h) - M(a))k$ , se tiene que

$$\Omega = f_{xy}(\alpha_1, \beta_1)kh = f_{yx}(\alpha_2, \beta_2)hk,$$

y, por consiguiente,

$$f_{xy}(\alpha_1, \beta_1) = f_{yx}(\alpha_2, \beta_2).$$

Como  $f_{xy}$  y  $f_{yx}$  son continuas y  $(\alpha_1, \beta_1)$  y  $(\alpha_2, \beta_2)$  tienden a  $(a, b)$  cuando  $(h, k)$  tiende a  $(0, 0)$ , se concluye que  $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ , que es lo que queríamos mostrar.

## EJERCICIOS

1. Calcule las derivadas direccionales de las siguientes funciones en el punto dado y la dirección dada. No olvide que la dirección la dá un vector unitario.

(a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  en el punto  $(1, 1)$  en la dirección del vector  $\mathbf{v} = \langle 1, 1 \rangle$

(b)  $f(x, y) = \cos(x + y)$  en el punto  $(0, \pi)$  en la dirección del vector  $\mathbf{v} = \langle 2, 1 \rangle$

(c)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y + 4}$  en el punto  $(1, 0)$  en la dirección del vector  $\mathbf{v} = \langle -1, 1 \rangle$

(d)  $f(x, y) = \frac{x + 1}{y + 1}$  en el punto  $(1, 5)$  en la dirección del vector  $\mathbf{v} = \langle -1, -2 \rangle$

2. Calcule las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  de cada una de las siguientes funciones:

(a)  $f(x, y) = e^{xy} + xy$

(b)  $f(x, y) = x^2 - y^2 + 6xy + 4x - 8y + 2$

(c)  $f(x, y) = x^4$

(d)  $f(x, y) = x + 2y$

(e)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(f)  $f(x, y) = \text{sen}(x + y)$

(g)  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y + 4}$

(h)  $f(x, y) = \frac{xy + 1}{x + y}$

(i)  $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$

(j)  $f(x, y) = \ln(xy)$

(k)  $f(x, y) = \text{sen}(xy)$

(l)  $f(x, y) = \tan(x + y)$

3. Calcule las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  y  $\frac{\partial f}{\partial z}$  de cada una de las siguientes funciones:

(a)  $f(x, y, z) = x - \sqrt{y^2 + z^2}$

(b)  $f(x, y, z) = \tanh(x + y + 3z)$

(c)  $f(x, y, z) = \text{arcsec}(x + yz)$

(d)  $f(x, y, z) = xe^{(x^2 + y^3)/z}$

4. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación  $z = f(x, y)$  en el punto  $P$ :

(a)  $f(x, y) = x^2 + y^3, P(1, 1, 2)$     (b)  $f(x, y) = xy, P(1, -1, -1)$

(c)  $f(x, y) = x^2y, P(-1, 1, 1)$     (d)  $f(x, y) = xe^y, P(1, 0, 1)$

(e)  $f(x, y) = x + 2y, P(2, 1, 4)$     (f)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, P(3, 4, 5)$

5. Determine la función afín de cada una de las siguientes funciones en los puntos dados:

(a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  en  $(0, 0)$  y en  $(1, 1)$ .

(b)  $f(x, y) = (x + y + 2)^2$  en  $(0, 0)$  y en  $(1, 2)$ .

(c)  $f(x, y) = e^x \cos(2y)$  en  $(0, 0)$  y en  $(0, \pi/2)$ .

(d)  $f(x, y, z) = xy + xz + yz$  en  $(1, 1, 1)$  y en  $(1, 0, 0)$ .

(e)  $f(x, y, z) = \frac{\text{sen}(xy)}{z}$  en  $(\pi/2, 1, 1)$  y en  $(2, 0, 1)$ .

(f)  $f(x, y, z) = \arctan(xyz)$  en  $(1, 0, 0)$  y en  $(1, 1, 0)$ .

6. Sea  $f(x, y) = -(1 - x^2 - y^2)^{1/2}$  si  $x^2 + y^2 < 1$ , muestre que el plano tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  es ortogonal al vector  $\langle x_0, y_0, f(x_0, y_0) \rangle$ .

7. Para las siguientes funciones, i) escriba explícitamente la función afín  $L_f^{(a,b)}$  de  $f$  en el punto  $(a, b)$ , ii) evalúe la función afín en  $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ , iii) escriba explícitamente el error  $E$  que se comete al aproximar  $f(a + \Delta x, b + \Delta y)$  por  $L_f^{(a,b)}(a + \Delta x, b + \Delta y)$ , iv) determine  $\langle \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle$  tal que  $E = \langle \Delta x, \Delta y \rangle \cdot \langle \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle$  y v) muestre que  $E$  es bien pequeño y concluya que  $f$  es diferenciable en  $(a, b)$ :

(a)  $f(x, y) = x + y$     (b)  $f(x, y) = x^2 + y^2$     (c)  $f(x, y) = x/(y + 1)$

8. Si  $f(x, y) = \varphi((x + y)/(x - y))$  para alguna función diferenciable  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  muestre que  $xf_x + yf_y = 0$

9. Defina lo que significa que  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sea diferenciable en un punto  $a \in \mathbb{R}$  en términos del comportamiento del error al aproximar  $\varphi$  mediante su función afín en  $a$ . Demuestre que  $\varphi$  es diferenciable en  $a$  si y sólo si  $\varphi$  es derivable en  $a$ .

10. Para cada una de las siguientes funciones  $\varphi$  escriba explícitamente la función afín  $L_\varphi^a$  de  $\varphi$  en el punto  $a$ , evalúe la función afín en  $a + \Delta t$ , escriba explícitamente el error  $E_\varphi^a$  que se comete al aproximar  $\varphi(a + \Delta t)$  por  $L_\varphi^a(a + \Delta t)$ . Además, encuentre  $\varepsilon$  tal que  $E_\varphi^a = \Delta t \cdot \varepsilon$  y muestre que  $E_\varphi^a$  es bien pequeño calculando  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon$ .

- (a)  $\varphi(t) = \ln t, \quad a = 1.$                       (b)  $\varphi(t) = \cos t, \quad a = \pi/4.$   
 (c)  $\varphi(t) = e^t, \quad a = 0.$                       (d)  $\varphi(t) = \sqrt{t}, \quad a = 1.$   
 (e)  $\varphi(t) = \frac{t}{t^2 + 1}, \quad a = 1.$                       (f)  $\varphi(t) = \ln \cos t, \quad a = \pi/4.$

11. Sean  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , diferenciable en  $(a, b)$ , y  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $f(a, b)$ . Si  $E_f^{(a,b)}$  es el error de aproximación de  $f$  en  $(a, b)$  mediante su función afín en  $(a, b)$  y  $E_\varphi^{f(a,b)}$  es el error de aproximación de  $\varphi$  en  $f(a, b)$  mediante su función afín en  $f(a, b)$ , demuestre que

$$E_{\varphi \circ f}^{(a,b)} = E_\varphi^{f(a,b)} + \varphi'(f(a, b))E_f^{(a,b)}.$$

Use este resultado para demostrar que  $\varphi \circ f$  es diferenciable en  $(a, b)$ .

12. Sean  $f$  y  $g$  funciones de dos variables con primeras derivadas parciales en  $(a, b)$ . Si  $E_f^{(a,b)}$  es el error de aproximación de  $f$  en  $(a, b)$  mediante su función afín en  $(a, b)$  y  $E_g^{(a,b)}$  es el error de aproximación de  $g$  en  $(a, b)$  mediante su función afín en  $(a, b)$ , demuestre que:

- (a)  $E_{f+g}^{(a,b)} = E_f^{(a,b)} + E_g^{(a,b)}.$   
 (b)  $E_{f \cdot g}^{(a,b)} = g(a, b)E_f^{(a,b)} + f(a, b)E_g^{(a,b)} + \Delta f \cdot dg.$   
 (c)  $E_{f/g}^{(a,b)} = \left( \frac{g(x, y) + g(a, b)}{g(a, b)} \right) \left( \frac{g(a, b)df - f(a, b)dg}{g(a, b)g(x, y)} \right) + \frac{g(a, b)E_f^{(a,b)} - f(a, b)E_g^{(a,b)}}{g(a, b)g(x, y)}.$

Usando estos resultados, demuestre que si  $f$  y  $g$  son diferenciables en  $(a, b)$  entonces  $f + g$ ,  $f \cdot g$  y  $f/g$  son diferenciables en  $(a, b)$ .

13. Sea  $f$  la función definida por,  $f(0, 0) = 0$  y

$$f(x, y) = \frac{3x^2y - y^3}{x^2 + y}.$$



- (a) Determine el dominio de  $f$  y represéntelo en el plano.  
 (b) Muestre que  $f$  tiene derivadas direccionales en  $(0, 0)$ , en todas las direcciones, pero no es diferenciable en  $(0, 0)$ .

14. Muestre que la función  $f$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en  $(0, 0)$  pero que no es diferenciable en  $(0, 0)$ .

15. Sea  $f$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Muestre que las derivadas parciales de  $f$  existen en todo su dominio.  
 (b) Encuentre los puntos en que  $f$  es diferenciable y los puntos en los que  $f$  no lo es.

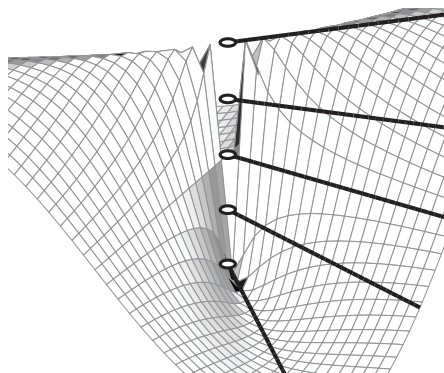


Figura 5.6: Esta es la gráfica de la función  $f(x, y) = (xy)/(x^2 + y^2)$ . Las líneas negras muestran el comportamiento de los valores de la función evaluada en los pasos por el punto  $(0, 0)$ . Obsérvese que  $f(at, bt) = (ab)/(a^2 + b^2)$  no depende de  $t$ .

16. Considere la función  $f$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2 y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Explique lo que significaría que  $f$  sea diferenciable en  $(0, 0)$ .

- (b) Muestre que las derivadas parciales  $f_x(0,0)$  y  $f_y(0,0)$  existen y calcúlelas.
- (c) ¿Es  $f$  diferenciable en  $(0,0)$ ?

17. Considere la función  $f$  definida por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(xyz)}{x^4 + y^4 + z^4} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

- (a) Muestre que las derivadas parciales de  $f$  existen en todo el dominio.
- (b) Encuentre los puntos en que  $f$  es diferenciable y los puntos en los que  $f$  no lo es.

18. Al efectuar incrementos  $\Delta x$  y  $\Delta y$  en las variables  $x$  y  $y$  respectivamente, a partir del punto  $(x_0, y_0)$ , el *cambio absoluto* de una función diferenciable  $f$  es  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ , que se puede estimar usando el diferencial  $df = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$ , ya que  $E = \Delta f - df$  es un error bien pequeño. Así, el *cambio relativo*, definido por  $\frac{\Delta f}{f(x_0, y_0)}$ , se puede estimar mediante  $\frac{df}{f(x_0, y_0)}$  y el *cambio porcentual*, definido por  $\frac{\Delta f}{f(x_0, y_0)} \times 100$ , se puede estimar mediante  $\frac{df}{f(x_0, y_0)} \times 100$ .

- (a) Suponga que el radio  $r_0 = 1$  y la altura  $h_0 = 5$  de un cilindro circular recto experimentan variaciones  $\Delta r = 0,03$  unidades y  $\Delta h = -0,1$  unidades. Estime los cambios absoluto, relativo y porcentual de su volumen.
- (b) El volumen  $V = \pi r^2 h$  de un cilindro circular recto va a calcularse a partir de los valores medidos de  $r$  y  $h$ . Si  $r$  se mide con un error de no más del 2% y  $h$  con un error de no más de 0,5%, estime el posible porcentaje de error resultante en el cálculo de  $V$ .
- (c) El área de un lote triangular es  $(1/2)ab \text{sen } C$ , donde  $a$  y  $b$  son las longitudes de dos de sus lados y  $C$  es la medida del ángulo formado por esos dos lados. Al efectuar medidas topográficas sobre el terreno del lote triangular, se han obtenido medidas de  $a$ ,  $b$  y  $C$  de 150 m, 200 m, y  $60^\circ$  respectivamente. Estime el error en el cálculo del área del lote si la medida  $a$ ,  $b$  de sus lados tienen errores de 15 cm cada una y  $C$  un error de  $2^\circ$ .

19. Calcule todas las derivadas parciales de segundo orden de las siguientes funciones.

(a)  $f(x, y) = \text{sen}(x^2 - 3xy)$

(b)  $f(x, y) = x^2y^2e^{2xy}$

(c)  $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$

20. Una función  $u = f(x, y)$  es una función *armónica* si sus derivadas parciales segundas existen, son continuas y satisfacen la ecuación de Laplace  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ . Muestre que la función  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$  es armónica.

21. Sea  $f(x, y) = \frac{(x^3y - xy^3)}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  y  $f(0, 0) = 0$ .

(a) Calcule  $f_x(x, y)$  y  $f_y(x, y)$ , para  $(x, y) \neq (0, 0)$

(b) Verifique que  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$  usando la definición de derivada direccional.

(c) Verifique que  $f_{yx}(0, 0) = 1$  y que  $f_{xy}(0, 0) = -1$ .

(d) ¿Qué puede decir de las derivadas parciales cruzadas de acuerdo con los resultados anteriores?

22. Calcule  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  y  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  para cada una de las siguientes funciones:

(a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$

(b)  $f(x, y) = \cos(x + y)$

(c)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y + 4}$

(d)  $f(x, y) = \frac{x + 1}{y + 1}$

(e)  $f(x, y) = e^{xy} + xy$

(f)  $f(x, y) = x^2 - y^2 + 6xy + 4x - 8y + 2$

(g)  $f(x, y) = x^4$

(h)  $f(x, y) = x + 2y$

(i)  $f(x, y) = \ln(xy)$

(j)  $f(x, y) = \text{sen}(xy)$

23. Muestre que la función  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , es armónica en  $E = \mathbb{R}^3 - \{0\}$ , es decir, que satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

El lado derecho de la ecuación de Laplace se suele abreviar escribiendo  $\Delta f$  o también  $\nabla^2 f$ . En este libro ya hemos usado  $\Delta f$  para denotar el incremento  $f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$  de  $f$ , por lo que tendremos que adoptar la notación  $\nabla^2 f$ , que se lee “lapaciano de  $f$ ”. Con esta notación,

$$\nabla^2 f = 0$$

es la ecuación de Laplace.

24. Muestre que la función  $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y)$  satisface la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

25. Sean  $u$  y  $v$  funciones dos veces diferenciables de una sola variable, y sea  $c \neq 0$  una constante. Muestre que  $f(x, y) = u(x + cy) + v(x - cy)$  es una solución de la ecuación general de onda unidimensional.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$



## LECCIÓN 6

---

### Regla de la cadena

---

En general, en cálculo se trabaja con funciones que se obtienen de componer, sumar o multiplicar las funciones elementales. En el caso de funciones de una sola variable se tiene un instrumento muy valioso para el cálculo de la derivada de una función compuesta. Este instrumento es la Regla de la Cadena. En esta lección se generalizará la regla de la cadena para el caso en que la función que se quiere derivar es la compuesta de una función vectorial con una función escalar.

Supongamos que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en todos los puntos de su dominio (que supondremos abierto) y que la función vectorial  $\mathbf{r} : I \rightarrow D$ ,  $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ , es derivable en  $I$ . La composición de estas dos funciones es la función  $z : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada  $z(t) = f(\mathbf{r}(t))$  y estamos interesados en estudiar la derivada de  $z$  con respecto a  $t$ . Si hacemos un cambio  $\Delta t$  en la variable  $t$  obtenemos cambios  $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$  y  $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$ , así, usando el hecho de que  $f$  es diferenciable, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\Delta z}{\Delta t} &= \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - f(x(t), y(t))}{\Delta t} \\ &= \frac{f_x(x(t), y(t))\Delta x + f_y(x(t), y(t))\Delta y + E}{\Delta t}\end{aligned}$$

$$= f_x(x(t), y(t)) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x(t), y(t)) \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{E}{\Delta t},$$

donde  $E = \Delta f - df$  que es bien pequeño ya que  $f$  es diferenciable. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_x(x(t), y(t))\Delta x + f_y(x(t), y(t))\Delta y + E}{\Delta t} \\ &= f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle \cdot \left\langle \frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \right\rangle = \langle 0, 0 \rangle \cdot \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle = 0,$$

se obtiene

$$\frac{dz}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = \langle f_x, f_y \rangle \cdot \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle,$$

que es la Regla de la Cadena en esta situación particular.

Si definimos el *vector gradiente* de  $f$  para cada  $(x, y) \in D$  como  $\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle$ , la regla de la cadena se puede expresar de la siguiente forma

$$\frac{dz}{dt} = \nabla f \cdot \mathbf{r}'$$

o, más explícitamente,

$$\frac{dz}{dt}(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t).$$

Teniendo en cuenta la regla de la cadena, podemos reformular la derivada direccional de  $f$  en la dirección de un vector  $\mathbf{v}$ , en el caso en que  $f$  sea diferenciable, así:

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\mathbf{v}}(x, y) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x + v_1 t, y + v_2 t) \\ &= \nabla f(x + v_1 t, y + v_2 t) \cdot \langle v_1, v_2 \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

A partir de esta última, se deducen varias propiedades del vector gradiente. En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\mathbf{v}}(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{v} \\ &= \|\nabla f(x, y)\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \\ &= \|\nabla f(x, y)\| \cos \theta, \end{aligned}$$

siendo  $\theta$  el ángulo entre  $\nabla f(x, y)$  y  $\mathbf{v}$ . De aquí que la dirección en la que la derivada direccional  $\frac{df}{d\mathbf{v}}$  es máxima es aquella en la que  $\mathbf{v}$  tiene la misma dirección y sentido de  $\nabla f(x, y)$ . En este caso,  $\frac{df}{d\mathbf{v}}(x, y) = \|\nabla f(x, y)\|$  es la razón de máximo crecimiento de la función en el punto  $(x, y)$ . De igual manera, en el sentido opuesto al del gradiente se obtiene el máximo decrecimiento de la función en el punto y  $\frac{df}{d\mathbf{v}}(x, y) = -\|\nabla f(x, y)\|$  es la razón de máximo decrecimiento de la función en el punto  $(x, y)$ .

Por otro lado, si  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  es una parametrización de la curva de nivel  $N_k^f$ , se tiene que  $k = f(\mathbf{r}(t))$  y por consiguiente,  $0 = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$ , lo que quiere decir que  $\nabla f(\mathbf{r}(t))$  es perpendicular a la curva de nivel  $N_k^f$  en el punto  $(x(t), y(t))$ .

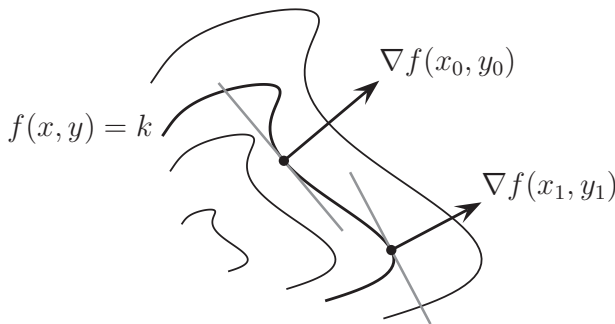


Figura 6.1: Algunas curvas de nivel de una función  $f$  de dos variables y valores de  $\nabla f$  en dos puntos.

Ahora bien, todo lo que hemos hecho con funciones de dos variable hasta el momento, se puede generalizar a funciones de tres y más variables. Por ejemplo, mediante un razonamiento muy similar al último aquí presentado, se puede concluir que para una función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , el gradiente  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  es perpendicular a la superficie de nivel  $N_k^f$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0) \in N_k^f$ .



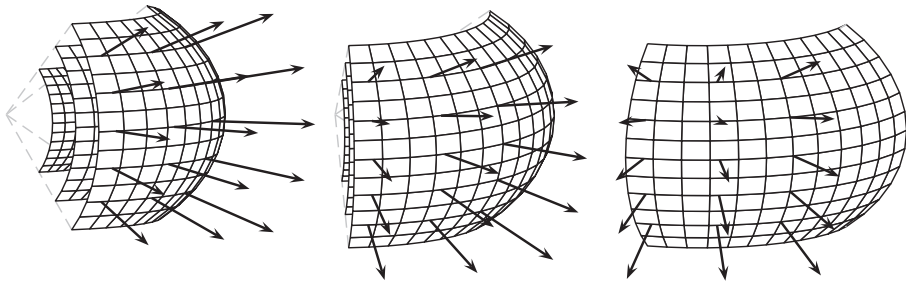


Figura 6.2: Algunas superficies de nivel de la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  y valores de  $\nabla f$  en varios puntos.

Este último resultado permite encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel  $N_k^f$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0) \in N_k^f$ , ya que un vector normal al plano tangente en ese punto es  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ . Explícitamente, la ecuación de dicho plano es

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Supóngase ahora que  $f$  es una función diferenciable de dos variables  $x, y$ , que a su vez dependen de dos variables independientes  $s$  y  $t$ , es decir,  $z(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$ . Suponiendo que  $x$  y  $y$  tienen derivadas parciales con respecto a  $s$  y a  $t$ , queremos calcular las derivadas parciales de  $f$  con respecto a  $s$  y a  $t$ . Al hacer un incremento  $\Delta s$  en la variable  $s$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta z &= z(s + \Delta s, t) - z(s, t) \\ &= f(x(s + \Delta s, t), y(s + \Delta s, t)) - f(x(s, t), y(s, t)) \\ &= f_x(x, y)(x(s + \Delta s, t) - x(s, t)) + f_y(x, y)(y(s + \Delta s, t) - y(s, t)) + E \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z}{\Delta s} &= f_x(x, y) \frac{(x(s + \Delta s, t) - x(s, t))}{\Delta s} + f_y(x, y) \frac{(y(s + \Delta s, t) - y(s, t))}{\Delta s} + \frac{E}{\Delta s} \\ &= f_x(x, y) \frac{(x(s + \Delta s, t) - x(s, t))}{\Delta s} + f_y(x, y) \frac{(y(s + \Delta s, t) - y(s, t))}{\Delta s} \\ &\quad + \left\langle \frac{(x(s + \Delta s, t) - x(s, t))}{\Delta s}, \frac{(y(s + \Delta s, t) - y(s, t))}{\Delta s} \right\rangle \cdot \langle \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle \end{aligned}$$

que tiende a  $f_x(x, y)x_s + f_y(x, y)y_s$ , cuando  $\Delta s$  tiende a cero. Así,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = f_x x_s + f_y y_s = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}.$$

De igual manera se puede verificar que:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Por último, uno de los usos más frecuentes de la regla de la cadena se dá en el cálculo de derivadas de funciones definidas implícitamente. Por ejemplo, si  $f$  es una función diferenciable de dos variables y la ecuación  $0 = f(x, y)$  define implícitamente a  $y$  como función diferenciable de  $x$ ,  $y = g(x)$ , podemos usar la regla de la cadena para calcular la derivada de  $g$ . Sea  $F(t) = f(t, g(t))$ . Se tiene entonces que  $F$  se anula y por lo tanto que su derivada es cero:

$$\begin{aligned} 0 = F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} g'(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$g'(t) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(t, g(t))}{\frac{\partial f}{\partial y}(t, g(t))}$$

siempre y cuando  $\frac{\partial f}{\partial y}(t, g(t)) \neq 0$ .

## EJERCICIOS

1. Suponga que el movimiento de un objeto en el espacio está dado por  $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$  y que la temperatura en un punto cualquiera del espacio está dada por  $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y$ .
  - (a) Determine si existe un punto del recorrido del objeto en el cual la temperatura es 0.
  - (b) Determine la razón de cambio de la temperatura del objeto en  $t = \frac{7\pi}{3}$ .
  - (c) Determine el punto o los puntos en la trayectoria del objeto en los cuales la razón de cambio de la temperatura es máxima y los puntos en los cuales es mínima. ¿Cuál es el valor de la temperatura en esos puntos?
  
2. En el instante  $t = 0$ , un objeto sale despedido de la superficie de ecuación  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ , en el punto  $(1, 1, 1)$ , en dirección normal a la superficie, con rapidez de 10 unidades por segundo.
  - (a) ¿En qué instante de tiempo atraviesa el objeto cada uno de los planos coordenados?
  - (b) ¿En qué punto se encuentra el objeto en el instante  $t = 7$ ?
  - (c) ¿En qué punto atraviesa, el objeto, la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = 103$ ?
  - (d) Si a partir del momento en que el objeto sale despedido de la superficie, se ejerce sobre él la fuerza  $\mathbf{F} = 4m\mathbf{j} - 10m\mathbf{k}$  (donde  $m$  es la masa del objeto), cuál es la altura máxima que alcanza el objeto sobre el plano  $z = 0$ ? y ¿cuál es el punto de impacto del objeto con el plano  $z = 0$ ?
  - (e) Si a partir del momento en que el objeto sale despedido de la superficie, se ejerce sobre él la fuerza  $\mathbf{F} = 4m\mathbf{j} - 10m\mathbf{k}$  (donde  $m$  es la masa del objeto), ¿cuál es la altura máxima que alcanza el objeto sobre el plano tangente a la superficie en el punto  $(1, 1, 1)$ ? y ¿cuál es el punto de impacto del objeto con este plano?
  
3. El capitán Ralph tiene problemas cerca de la cara iluminada de Mercurio. La temperatura en el casco de su nave cuando se encuentra en el punto  $(x, y, z)$  es de  $T(x, y, z) = e^{-x^2 - 2y^2 - 3z^2}$ , donde  $x, y, z$  se miden en metros. En este momento está en el punto  $(1, -2, 1)$ .

- (a) ¿En qué dirección debe moverse para que la temperatura baje lo más rápidamente posible?
- (b) Si la nave se mueve con una rapidez de  $e^6$  metros por segundo, ¿a qué velocidad bajará la temperatura cuando se desplace en esa dirección?
- (c) Desafortunadamente, el metal del casco de la nave se fracturará si se entra a una velocidad mayor de  $\sqrt{14}e^4$  grados por segundo. Describa el conjunto de direcciones según las cuales puede desplazarse para bajar la temperatura a un ritmo inferior al límite permitido.

Tomado del libro Cálculo Vectorial, de Marsden J. y Tromba A., Prentice Hall 2004[1].

4. Ilustre la Regla de la Cadena con las funciones  $f(x, y, z) = \ln \frac{1 + 2x^2 + 3z^2}{1 + y^2}$  y  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$ .
5. En cada literal determine la ecuación del plano tangente a la superficie  $z = f(x, y)$  en el punto  $P$ :
- (a)  $f(x, y) = x^2 + y^3$ ,  $P(1, 1, 2)$       (b)  $f(x, y) = xy$ ,  $P(1, -1, -1)$
- (c)  $f(x, y) = x^2y$ ,  $P(-1, 1, 1)$       (d)  $f(x, y) = xe^y$ ,  $P(1, 0, 1)$
- (e)  $f(x, y) = x + 2y$ ,  $P(2, 1, 4)$       (f)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $P(3, 4, 5)$
6. En cada literal determine la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto  $P$ :
- (a)  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $P(\sqrt{3}, 1, 0)$       (b)  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  $P(0, 0, 3)$
- (c)  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ,  $P(3, 4, 5)$       (d)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ ,  $P\left(1, 2, \frac{2\sqrt{11}}{3}\right)$
7. Calcule el gradiente de cada función  $f$ :
- (a)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$       (b)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$
- (c)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$       (d)  $f(x, y) = x^2e^y$

(e)  $f(x, y) = \ln(xy)$

(f)  $f(x, y) = 2x + 5y$

(g)  $f(x, y, z) = \text{sen}(xyz)$

(h)  $f(x, y, z) = x^2 e^{yz}$

(i)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

(j)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

8. Calcule la derivada direccional de  $f$  en el punto  $P$  en la dirección de  $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$ .

(a)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1, P(1, 1)$

(b)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}, P(1, 1)$

(c)  $f(x, y) = x^2 e^y, P(1, 1)$

(d)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}, P(1, 1)$

9. Calcule la derivada direccional de  $f$  en el punto  $P(1, 1, 1)$  en la dirección de  $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$ .

(a)  $f(x, y, z) = \text{sen}(xyz),$

(b)  $f(x, y, z) = x^2 e^{yz}.$

10. ¿En qué dirección la función  $f(x, y) = xy^2 + x^3y$  crece más rápidamente desde el punto  $(1, 2)$ ? ¿En qué dirección decrece más rápidamente desde el mismo punto?

11. La temperatura  $T$  de un sólido está dado por la función  $T(x, y, z) = e^{-x} + e^{-2y} + e^{4z}$ , donde  $x, y, z$  son las coordenadas espaciales relativas al centro del sólido. ¿En qué dirección desde el punto  $(1, 1, 1)$  decrecerá más rápidamente la temperatura?

12. Sean  $f$  y  $g$  funciones continuamente diferenciables, sea  $c$  una constante, y sea  $\mathbf{v}$  un vector unitario en  $\mathbb{R}^2$ . Muestre que:

(a)  $\nabla(cf) = c \nabla f$

(b)  $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

(c)  $\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$

(d)  $\nabla(f/g) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2},$   
 $g(x, y) \neq 0$

(e)  $\frac{df}{d(-\mathbf{v})} = -\frac{df}{d\mathbf{v}}$

(f)  $\frac{d(cf)}{d\mathbf{v}} = c \frac{df}{d\mathbf{v}}$

(g)  $\frac{d(f + g)}{d\mathbf{v}} = \frac{df}{d\mathbf{v}} + \frac{dg}{d\mathbf{v}}$

(h)  $\frac{d(fg)}{d\mathbf{v}} = f \frac{dg}{d\mathbf{v}} + g \frac{df}{d\mathbf{v}}$

13. La función  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  es la longitud del vector posición  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  para cada punto  $(x, y)$  en  $\mathbb{R}^2$ . muestre que  $\nabla r = \frac{1}{r}\mathbf{r}$  cuando  $(x, y) \neq (0, 0)$ , y que  $\nabla(r^2) = 2\mathbf{r}$ .
14. La Regla de la Cadena no se puede utilizar en los casos en que la función  $f$  no es diferenciable. Veamos un ejemplo. Sea  $f$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Muestre que  $f_x$  y  $f_y$  existen en  $(0, 0)$ .
- (b) Si  $\mathbf{g}(t) = \langle at, bt \rangle$  siendo  $a$  y  $b$  constantes, muestre que  $f \circ \mathbf{g}$  es diferenciable y que  $(f \circ \mathbf{g})'(0) = ab^2/(a^2 + b^2)$ .
- (c) Sin embargo, muestre que  $\nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{g}'(0) = 0$ .
15. Para la función  $z(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ , con  $f(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}$ ,  $u(x, y) = e^{-x-y}$  y  $v(x, y) = e^{xy}$ . Calcule cada una de las siguientes derivadas usando la regla de la cadena.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \frac{\partial z}{\partial x} & \text{(c)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \text{(b)} \quad \frac{\partial z}{\partial y} & \text{(d)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{array}$$

16. Para la función  $z(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ . Determine cada una de las siguientes derivadas usando la regla de la cadena.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \frac{\partial z}{\partial x} & \text{(c)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \text{(b)} \quad \frac{\partial z}{\partial y} & \text{(d)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{array}$$

17. Dada la función  $z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ , con  $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^3$ ,  $x(u, v) = \frac{u}{v}$  y  $y(u, v) = \ln(u - v)$ . Determine los valores de  $\frac{\partial z}{\partial u}$  y  $\frac{\partial z}{\partial v}$  cuando

- (a)  $u = 4$  y  $v = 2$ .
- (b)  $x = 2$  y  $y = 0$ .

18. Dada la función  $z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ , con  $f(x, y) = \arctan\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ , con  $x(u, v) = u^v$  y  $y(u, v) = e^{u/v}$ . Determine los valores de  $\frac{\partial z}{\partial u}$  y  $\frac{\partial z}{\partial v}$  cuando

(a)  $u = 4$  y  $v = 2$ .

(b)  $x = 4$  y  $y = e$

19. Las siguientes ecuaciones definen implícitamente a  $y$  como función de  $x$ . Calcule  $dy/dx$  en el punto dado.

(a)  $2x^3 - 3y^2 + xy = 0$  en el punto  $(1, 1)$ .

(b)  $xy + y^2 - 3x - 3 = 0$  en el punto  $(-1, 1)$ .

(c)  $ye^x + \text{sen}(xy) + x - 3 = 0$  en el punto  $(3, 0)$ .

20. Sea  $f$  es una función diferenciable de tres variables y suponga que la ecuación  $0 = f(x, y, z)$  define implícitamente a  $z$  como función diferenciable de  $x$  y  $y$ ,  $z = g(x, y)$ . Ponga  $x(s, t) = s$ ,  $y(s, t) = t$  y  $z(s, t) = g(x(s, t), y(s, t))$  y use la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales de  $g$  y mostrar que

$$g_x(s, t) = -\frac{f_x(s, t, g(s, t))}{f_z(s, t, g(s, t))}$$

y que

$$g_y(s, t) = -\frac{f_y(s, t, g(s, t))}{f_z(s, t, g(s, t))}$$

siempre y cuando  $f_z(s, t, g(s, t)) \neq 0$ .

21. Calcule  $\partial z/\partial x$  y  $\partial z/\partial y$  en los puntos dados, suponiendo que las ecuaciones dadas definen implícitamente a  $z$  como función de  $x$  y  $y$ .

(a)  $y^3 - xz + yz + z^3 - 2 = 0$  en el punto  $(1, 1, 1)$

(b)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 = 0$  en el punto  $(2, 3, 6)$ .

(c)  $\cos(x+y) + \cos(y+z) + \cos(x+z) + 3 = 0$  en el punto  $(\pi/2, \pi/2, \pi/2)$ .

22. Sea  $f$  una función diferenciable y  $w(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \text{sen } \theta)$ .

(a) Calcule  $\partial w/\partial r$  y  $\partial w/\partial \theta$  en términos de  $\partial f/\partial x$  y  $\partial f/\partial y$ .

(b) Escriba  $\partial f/\partial x$  y  $\partial f/\partial y$  en términos de  $\partial w/\partial r$  y  $\partial w/\partial \theta$ .

(c) Use los items anteriores para demostrar que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$$

23. Demuestre que, en coordenadas cilíndricas,  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z$ , donde  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  y  $\mathbf{e}_z$  son los campos vectoriales definidos por las curvas coordenadas en coordenadas cilíndricas.





---

## Valores extremos de funciones

---

Uno de los propósitos de estudiar cálculo diferencial en una sola variable es disponer de herramientas para determinar los puntos críticos y los valores extremos de una función. Los conceptos que hemos estudiado hasta el momento permiten hacer este estudio para funciones de dos variables. La extensión a funciones de más variables es un poco más delicada y no está al alcance de este curso.

Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

1.  $f$  tiene un *valor máximo local* en  $(a, b) \in D$ , si existe una vecindad  $V$  de  $(a, b)$  tal que  $f(x, y) \leq f(a, b)$ , para todo  $(x, y) \in D \cap V$ .
2.  $f$  tiene un *valor mínimo local* en  $(a, b) \in D$ , si existe una vecindad  $V$  de  $(a, b)$  tal que  $f(x, y) \geq f(a, b)$ , para todo  $(x, y) \in D \cap V$ .
3.  $f$  tiene un *valor máximo absoluto* en  $(a, b) \in D$ , si  $f(x, y) \leq f(a, b)$ , para todo  $(x, y) \in D$ .
4.  $f$  tiene un *valor mínimo absoluto* en  $(a, b) \in D$ , si  $f(x, y) \geq f(a, b)$ , para todo  $(x, y) \in D$ .

En algunos contextos se usan las palabras *relativo* en lugar de *local*, *global* en lugar de *absoluto* y a un valor máximo o un valor mínimo se le denomina *valor extremo*.

Si  $f$  tiene un valor máximo local en un punto  $P(a, b)$  interior de  $D$  y  $f$  tiene derivada en el punto  $P(a, b)$  en la dirección de  $\mathbf{v}$ , entonces  $\frac{df}{d\mathbf{v}}(a, b) = 0$ . En efecto, sea  $\mathbf{p} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow D$  un paso por  $P(a, b)$  en la dirección de  $\mathbf{v}$ . Como  $f$  tiene un máximo local en  $P(a, b)$  entonces la función  $f \circ \mathbf{p}$ , que es de una sola variable, tiene un máximo local en 0, así,

$$\frac{df}{d\mathbf{v}}(a, b) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\mathbf{p}(t)) = 0.$$

Recordemos que si  $f$  es diferenciable en  $P(a, b)$  entonces  $f$  tiene derivada en el punto  $P(a, b)$  en la dirección de  $\mathbf{v}$ , para todo  $\mathbf{v}$  y  $\frac{df}{d\mathbf{v}}(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{v}$ . Por lo tanto, podemos concluir que si  $f$  tiene un máximo local en  $P(a, b)$  entonces  $\nabla f(a, b) \cdot \mathbf{v} = 0$ , para todo  $\mathbf{v}$  y así  $\nabla f(a, b) = \langle f_x(a, b), f_y(a, b) \rangle = \langle 0, 0 \rangle$ .

Un análisis completamente análogo al anterior se puede hacer para el caso en que  $f$  tenga un mínimo local en  $(a, b)$ .

Nótese que si  $f$  es una función de una sola variable que tiene un máximo local o un mínimo local en un punto  $a$  y  $f$  es diferenciable en  $a$ , entonces  $f'(a) = 0$ . Por lo tanto, la recta tangente a la gráfica en el punto  $(a, f(a))$  es paralela al eje  $X$  y tiene ecuación  $y = f(a)$ . De igual manera, si  $f$  es una función de dos variables que tiene un valor máximo local o un mínimo local en  $(a, b)$  y  $f$  es diferenciable en  $(a, b)$  entonces  $\nabla f(a, b) = \langle 0, 0 \rangle$ . Por lo tanto, la ecuación del plano tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, b, f(a, b))$  es  $z = f(a, b)$ , que es la ecuación de un plano paralelo al plano  $XY$ .

Un punto  $P(a, b) \in D$  es un *punto crítico* de  $f$  si  $f$  es diferenciable en  $P(a, b)$  y  $f_x(a, b) = 0 = f_y(a, b)$ , o si  $f$  no es diferenciable en  $P(a, b)$ .

Claramente, si se quieren encontrar los puntos en los que una función alcanza sus valores máximos y mínimos relativos, se debe buscar entre los puntos críticos. Una vez identificados estos puntos, viene la tarea de su clasificación. Es decir, determinar en cuáles de estos puntos  $f$  tiene un valor mínimo local, en cuáles  $f$  tiene un valor máximo local, y en cuáles no tiene máximo ni mínimo local.

A continuación se hará la deducción del criterio de clasificación de puntos críticos para funciones de dos variables, herramienta muy útil en muchos casos en los que la función  $f$  tiene segundas derivadas parciales continuas en el punto

crítico  $(a, b)$ .

Supóngase que  $(a, b)$  es un punto crítico de la función  $f$  en el que  $f$  es diferenciable y tiene segundas derivadas parciales continuas. Sean  $\mathbf{p}$  un paso por el punto  $(a, b)$  en la dirección de  $\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$  y  $g(t) = f(\mathbf{p}(t))$ . Usando la regla de la cadena, se tiene

$$\begin{aligned} g'(t) &= \nabla f(\mathbf{p}(t)) \cdot \mathbf{v} \\ &= v_1 f_x(\mathbf{p}(t)) + v_2 f_y(\mathbf{p}(t)), \end{aligned}$$

y además  $g'(0) = \nabla f(\mathbf{p}(0)) \cdot \mathbf{v} = \langle f_x(a, b), f_y(a, b) \rangle \cdot \mathbf{v} = 0$ , por lo tanto 0 es un punto crítico de  $g$ . Aplicando nuevamente la regla de la cadena se obtiene:

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{d}{dt} \{v_1 f_x(\mathbf{p}(t)) + v_2 f_y(\mathbf{p}(t))\} \\ &= v_1 \{v_1 f_{xx}(\mathbf{p}(t)) + v_2 f_{xy}(\mathbf{p}(t))\} + v_2 \{v_1 f_{xy}(\mathbf{p}(t)) + v_2 f_{yy}(\mathbf{p}(t))\} \\ &= v_1^2 f_{xx}(\mathbf{p}(t)) + 2v_1 v_2 f_{xy}(\mathbf{p}(t)) + v_2^2 f_{yy}(\mathbf{p}(t)). \end{aligned}$$

Si  $f_{xx}(a, b) \neq 0$ , multiplicando y dividiendo por  $f_{xx}(a, b)$  la última expresión y completando el cuadrado, se obtiene

$$g''(t) = \frac{\{v_1 f_{xx}(\mathbf{p}(t)) + v_2 f_{xy}(\mathbf{p}(t))\}^2 + \{f_{yy}(\mathbf{p}(t)) f_{xx}(\mathbf{p}(t)) - f_{xy}^2(\mathbf{p}(t))\} v_2^2}{f_{xx}(\mathbf{p}(t))}.$$

Evaluando en  $t = 0$ , se tiene:

$$g''(0) = \frac{\{v_1 f_{xx}(a, b) + v_2 f_{xy}(a, b)\}^2 + \{f_{yy}(a, b) f_{xx}(a, b) - f_{xy}^2(a, b)\} v_2^2}{f_{xx}(a, b)}.$$

Si

$$\delta(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2,$$

de la última expresión se deduce que si  $\delta > 0$  y  $f_{xx}(a, b) > 0$  entonces  $g''(0) > 0$ , independientemente del vector  $\mathbf{v}$ , y que si  $\delta > 0$  y  $f_{xx}(a, b) < 0$  entonces  $g''(0) < 0$ , independientemente del vector  $\mathbf{v}$ . Como  $g$  es una función de una variable, por el criterio de la segunda derivada se tiene que en el primer caso  $g$  alcanza un valor mínimo local en 0, y en el segundo caso  $g$  alcanza un valor máximo local en 0. Como  $g(t) = f(\mathbf{p}(t))$ , donde  $\mathbf{p}(t)$  es un paso por  $(a, b)$ , se concluye que en el primer caso  $f$  alcanza un valor mínimo local en  $(a, b)$  en cualquier dirección  $\mathbf{v}$ , y en el segundo caso  $f$  alcanza un valor máximo local

en  $(a, b)$  en cualquier dirección  $\mathbf{v}$ . Si  $\delta < 0$  se tiene que hay direcciones en las que  $f$  alcanza un mínimo local en  $(a, b)$ , y direcciones en las que  $f$  alcanza un máximo local en  $(a, b)$ , en cuyo caso se dice que  $f$  tiene un *punto de silla* o un *punto de ensilladura* en  $(a, b)$ .

En conclusión se obtiene el siguiente criterio para clasificar los puntos críticos, de la función  $f$  en los que  $f$  es diferenciable y tiene segundas derivadas parciales continuas.

1. Si  $\delta > 0$  y  $f_{xx}(a, b) > 0$ , entonces  $f$  tiene un valor mínimo local en  $(a, b)$ ,
2. Si  $\delta > 0$  y  $f_{xx}(a, b) < 0$ , entonces  $f$  tiene un valor máximo local en  $(a, b)$ ,
3. Si  $\delta < 0$ , entonces  $f$  tiene un *punto de ensilladura* en  $(a, b)$ .

Hay resultados sobre valores extremos absolutos que se obtuvieron para funciones de una sola variable definidas en intervalos cerrados y acotados y que se pueden extender también a funciones de varias variables. Por ejemplo, si  $f$  es una función continua, definida en un intervalo cerrado y acotado  $I$ , se tiene que existen puntos  $x_0, x_1 \in I$  en los que la función alcanza su valor mínimo absoluto  $f(x_0)$  y su valor máximo absoluto  $f(x_1)$ . Para funciones de dos variables se tiene que si  $f$  está definida en un conjunto cerrado y acotado  $D$  y  $f$  es continua en  $D$ , entonces existen puntos  $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in D$  en los que  $f$  alcanza su valor mínimo absoluto  $f(x_0, y_0)$  y su valor máximo absoluto  $f(x_1, y_1)$ , respectivamente.

Las técnicas de demostración de estos resultados son un poco sofisticadas para el nivel de estas lecciones por lo que no se incluirán aquí. En cambio, se establece un protocolo para determinar los puntos en los que la función toma los valores extremos absolutos:

Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en el conjunto cerrado y acotado  $D$ , para determinar los puntos en los que  $f$  toma sus valores extremos absolutos.

1. Determine puntos destacados del dominio de la función (por ejemplo, si  $D$  está delimitado por la unión de varias curvas, considere los puntos de encuentro de dichas curvas),
2. Determine los puntos críticos de  $f$  que se encuentren en  $D$ ,
3. Determine los puntos de la frontera de  $D$  en los que  $f$  tiene valores extremos (hay varias formas de hacerlo, por ejemplo, si se conoce una parametrización, o una ecuación de la frontera, se puede restringir la función y buscar puntos críticos de la restricción.),

4. Compare los valores de  $f$  en los puntos determinados en 1, 2 y 3 y escoja aquel en el que  $f$  alcanza el mayor valor y aquel en el que alcanza el menor valor.

En general, la identificación de los puntos de la frontera en los que la función tiene valores extremos no es tarea fácil. Sin embargo, se cuenta con la técnica de los multiplicadores de Lagrange que en muchos casos es de gran ayuda, sobre todo cuando la frontera tiene una ecuación de la forma  $g(x, y) = k$ , es decir cuando esta frontera es una curva de nivel  $N_k^g$  de una cierta función  $g$ .

En realidad, la técnica de los Multiplicadores de Lagrange se usa para resolver problemas de optimización de una función con restricciones representables mediante curvas o superficies de nivel de otras funciones. Más precisamente, para hallar los puntos de una superficie de nivel  $k$  de una función  $g$  en los que una función  $f$  alcanza valores máximos (o mínimos), se usa la técnica de los Multiplicadores de Lagrange.

Supóngase que la función  $f$  tiene un valor extremo en el punto  $P(x_0, y_0)$  de la curva de nivel  $k$  de la función  $g$ , y que  $f$  y  $g$  son diferenciables. Si se parametriza  $N_k^g$  mediante una función vectorial  $\mathbf{r} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N_k^g$  de tal forma que  $\mathbf{r}(0) = \langle x_0, y_0 \rangle$ , se tiene, por un lado, que en 0 la función  $z = f \circ \mathbf{r}$  tiene un valor extremo y, por otro, que  $g(\mathbf{r}(t)) = k$  para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Entonces, usando la regla de la cadena, se tiene que

$$1. \quad 0 = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(0) \text{ y}$$

$$2. \quad 0 = \nabla g(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(0).$$

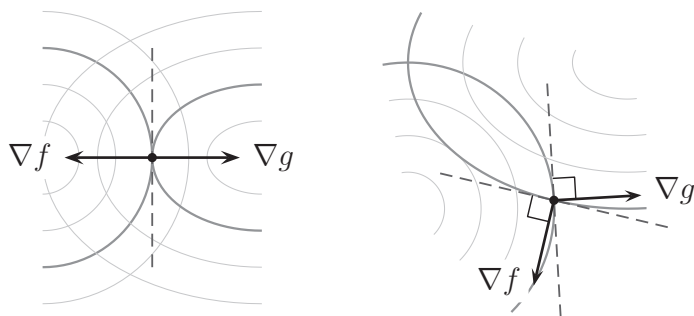


Figura 7.1

Esto quiere decir que en los puntos  $(x_0, y_0)$  de  $N_k^g$  en los que  $f$  tiene un valor extremo local, los gradientes  $\nabla f(x_0, y_0)$  y  $\nabla g(x_0, y_0)$  son paralelos, debido a que ambos son perpendiculares a  $\mathbf{r}'(0)$ . En resumen, si  $f$  tiene un valor extremo local en el punto  $(x_0, y_0)$  de  $N_k^g$ , existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  (multiplicador de Lagrange) tal que:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Volviendo al problema de determinar los puntos críticos de una función  $f$  en la frontera de  $D$ , cuya ecuación es  $g(x, y) = 0$ , se deben determinar los puntos de  $D$  en los que se satisface la ecuación anterior.

Para la optimización de una función  $f$  de tres variables, con dos restricciones dadas por superficies de nivel de otro par de funciones  $g_1$  y  $g_2$ , se tiene también una técnica de Multiplicadores de Lagrange. Explícitamente, supongamos que hemos restringido la función  $f$  al conjunto de puntos

$$R = \{(x, y, z) : g_1(x, y, z) = k_1 \quad \text{y} \quad g_2(x, y, z) = k_2\},$$

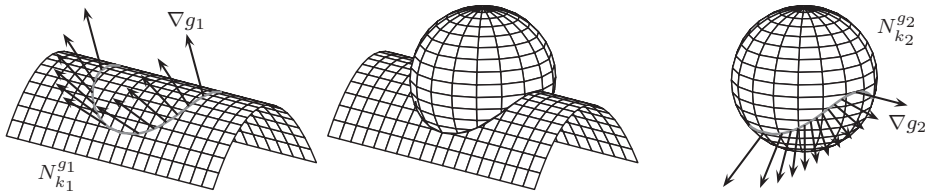


Figura 7.2: En la gráfica del centro se muestra la intersección de las superficies de nivel  $N_{k_1}^{g_1}$  y  $N_{k_2}^{g_2}$ . La gráfica de la izquierda representa el valor del campo gradiente  $\nabla g_1$  en puntos de la curva intersección de las superficies de nivel abstractando  $N_{k_2}^{g_2}$ . La gráfica de la derecha representa el valor del campo gradiente  $\nabla g_2$  en puntos de la curva intersección de las superficies de nivel abstractando  $N_{k_1}^{g_1}$ .

es decir, a la intersección de las superficies de nivel  $N_{k_1}^{g_1}$  y  $N_{k_2}^{g_2}$ . Supóngase además que  $f$  tiene un valor máximo local en  $P(a, b, c) \in R$  (local quiere decir comparado con puntos de  $R$  en una vecindad de  $P$ ) y que se puede parametrizar la parte de  $R$  que contiene el punto  $P$  mediante una función vectorial  $\mathbf{r} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow D$ , con  $\mathbf{r}(0) = \langle a, b, c \rangle$ . Entonces, la función  $f \circ \mathbf{r}$  tiene un valor máximo relativo en 0 y por consiguiente tiene derivada nula. Tenemos entonces, usando la regla de la cadena, que

1.  $0 = \nabla f(a, b, c) \cdot \mathbf{r}'(0)$
2.  $0 = \nabla g_1(a, b, c) \cdot \mathbf{r}'(0)$
3.  $0 = \nabla g_2(a, b, c) \cdot \mathbf{r}'(0)$

Es decir, el gradiente de  $f$  en  $(a, b, c)$  es paralelo al plano definido por los gradientes de  $g_1$  y  $g_2$  en  $(a, b, c)$ . Este hecho se puede escribir así:

$$\nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla g_1(a, b, c) + \mu \nabla g_2(a, b, c)$$

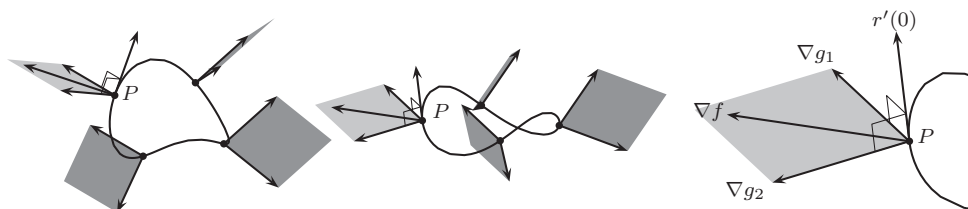


Figura 7.3: La gráfica corresponde a una secuencia de tres puntos de vista de la representación del paralelogramo formado por  $\nabla g_1$  y  $\nabla g_2$  en puntos de la curva de intersección de las superficies de nivel  $N_{k_1}^{g_1}$  y  $N_{k_2}^{g_2}$ . En cada una se ha destacado el punto  $P$  en el que los tres gradientes son coplanares.

La conclusión es que, si se buscan puntos donde la función tiene valores extremos sujeta a las dos restricciones en cuestión, se debe buscar entre aquellos puntos en los que se satisface la ecuación anterior para valores convenientes de  $\lambda$  y  $\mu$ , conocidos como multiplicadores de Lagrange.



## EJERCICIOS

1. Para cada una de las siguientes funciones determine los puntos críticos y clasifíquelos

(a)  $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2$       (b)  $f(x, y) = x^3 - 12x + y^2 + 8y$

(c)  $f(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$       (d)  $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + y^3 - 3y^2$

(e)  $f(x, y) = 2x^3 + 6xy + 3y^2$       (f)  $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + y^2$

(g)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$       (h)  $f(x, y) = -4x^2 + 4xy - 2y^2 + 16x - 12y$

(i)  $f(x, y) = x + 2y$       (j)  $f(x, y) = 4x^2 - 4xy + 2y^2 + 10x - 6y$

(k)  $f(x, y) = y \operatorname{sen} \pi x$       (l)  $f(x, y) = (2 + \cos \pi x) \operatorname{sen} \pi y$

(m)  $f(x, y) = \frac{3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18}{12(1 + 4y^2)}$

2. Determine el punto del plano  $2x - y + 3z = 20$  más próximo al origen, de tres formas diferentes.
3. Determine los valores máximo y mínimo absolutos de la función  $f(x, y) = \cos x + \operatorname{sen} y$  en el rectángulo  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $-2\pi \leq y \leq 2\pi$ .
4. Determine los valores máximo y mínimo absolutos de la función  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3y - xy$  en el disco  $x^2 + y^2 \leq 9$
5. Sea  $A$  una matriz simétrica  $3 \times 3$  diferente de  $\mathbf{0}$ , considerando la función  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$ .

(a) Determine  $\nabla f$ .

(b) Determine el máximo y el mínimo de  $f$  en

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

6. Para un sólido rectangular de 1000 metros cúbicos de volumen, determine las dimensiones que minimicen el área de su superficie.

7. Demuestre que si  $(a, b)$  es un punto donde  $f$  alcanza un valor máximo local o un valor mínimo local y  $f$  es diferenciable en  $(a, b)$ , entonces el plano tangente a la superficie  $z = f(x, y)$  en el punto  $(a, b, f(a, b))$  es paralelo al plano  $XY$ .
8. Determine tres números positivos  $x, y, z$  cuya suma es 10 y tales que  $x^2y^2z$  sea máxima.
9. Determine los valores máximo y mínimo de  $f(x, y) = 2x + y$  dado que  $x^2 + y^2 = 4$ .
10. Determine los valores máximo y mínimo de  $f(x, y) = xy$  dado que  $x^2 + 3y^2 = 6$ .
11. Determine los puntos de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 100$  que están más cercanos y más lejanos del punto  $(2, 3)$ .
12. Determine los valores máximo y mínimo de  $f(x, y, z) = x + y^2 + 2z$  dado que  $4x^2 + 9y^2 - 36z^2 = 36$ .
13. Determine el volumen del paralelepípedo rectangular más grande que puede inscribirse en el elipsoide.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

14. Determine las dimensiones del cono de mayor área superficial que puede inscribirse en una esfera de radio  $a$ .
15. La intersección entre la superficie cilíndrica de ecuación  $x^2 + y^2 = 4$  y el plano de ecuación  $2x + 3y + 6z = 24$  es una elipse. Determine los puntos, de esta elipse, más cercanos y los más lejanos del origen del sistema de coordenadas.
16. Un alambre de longitud  $A$  se corta en dos pedazos. Uno se dobla en forma de cuadrado y el otro en forma de circunferencia, determine las dimensiones de los dos pedazos de manera que la suma de las áreas del cuadrado y el círculo sea máxima y las dimensiones de los dos pedazos de manera que la suma de las áreas sea mínima.
17. Resuelva el ejercicio anterior en el caso en que los alambres se doblan en forma de triángulo equilátero y cuadrado.

18. Resuelva el ejercicio anterior en el caso en que los alambres se doblan en forma de triángulo rectángulo isósceles y cuadrado.
19. Una caja rectangular sin tapa tiene base cuadrada, encontrar las dimensiones de la caja de volumen constante y de mínima área superficial.
20. La longitud de la generatriz de un cono circular recto es  $a$ , determine la medida del ángulo formado por la generatriz y el eje de simetría del cono de volumen máximo.
21. Muestre que el producto de los senos de los ángulos de un triángulo es máximo cuando el triángulo es equilátero.
22. Determine los máximos y mínimos absolutos de la función  $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$  en la superficie triangular de vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, 2)$  y  $(1, 2)$
23. Determine la distancia más corta del punto  $(a, 0)$ ,  $a \neq 0$ , a la curva de ecuación  $x = y^2$ .
24. Determine el punto de la curva de intersección del plano  $2y + 4z = 5$  y el cono  $z^2 = 4x^2 + 4y^2$  más cercano al origen.
25. Descomponga el número 97 en 4 sumandos de manera que la suma de sus cuadrados sea mínima.
26. Descomponga el número positivo  $p$  en  $n$  factores positivos, de manera que la suma de sus inversos sea mínima.
27. Determine las dimensiones del tetraedro, en el primer octante, de volumen mínimo limitado por los planos coordenados y un plano tangente al elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .
28. Determine las dimensiones del recipiente cónico con tapa semiesférica con capacidad de 1 litro y área superficial máxima, y del de área superficial mínima.
29. Hay una versión del algoritmo de Newton para resolver sistemas de ecuaciones

$$f_1(x, y) = 0 \quad \text{and} \quad f_2(x, y) = 0 ,$$

donde  $f_1(x, y)$  y  $f_2(x, y)$  son funciones de valor real:

Tome un punto inicial  $(x_0, y_0)$ . Para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , defina:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\begin{vmatrix} f_1(x_n, y_n) & f_2(x_n, y_n) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{D(x_n, y_n)},$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\begin{vmatrix} f_1(x_n, y_n) & f_2(x_n, y_n) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{D(x_n, y_n)},$$

donde  $D(x_n, y_n) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n) \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n, y_n) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n, y_n) \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n, y_n)$ . Entonces la sucesión de puntos  $(x_n, y_n)_{n=1}^{\infty}$  converge a una solución. Escriba un programa de computador que use este algoritmo para encontrar soluciones aproximadas del sistema de ecuaciones:

$$\operatorname{sen}(xy) - x - y = 0 \quad \text{y} \quad e^{2x} - 2x + 3y = 0.$$

Muestre que se obtienen soluciones diferentes cuando se usan  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$  como puntos iniciales  $(x_0, y_0)$ .



---

Integrales múltiples

---

En cursos de cálculo anteriores se estudió el concepto de integral de una función  $f$  de una variable definida en un intervalo cerrado  $[a, b]$  como el límite de las sumas de Riemann cuando la norma de la partición tiende a cero. Concretamente, si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua,  $P(\mathcal{I}) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es una *partición uniforme* de la 1-celda  $\mathcal{I} = [a, b]$ ,  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ , y  $\Delta x = x_{k+1} - x_k = (b - a)/n$ , la *suma de Riemann*  $\mathfrak{R}(f, n, *)$  correspondiente a la partición  $P(\mathcal{I})$  y la escogencia de un punto de muestra  $x_k^*$  en cada uno de las subceldas  $[x_k, x_{k+1}]$  de  $[a, b]$  está definida por:

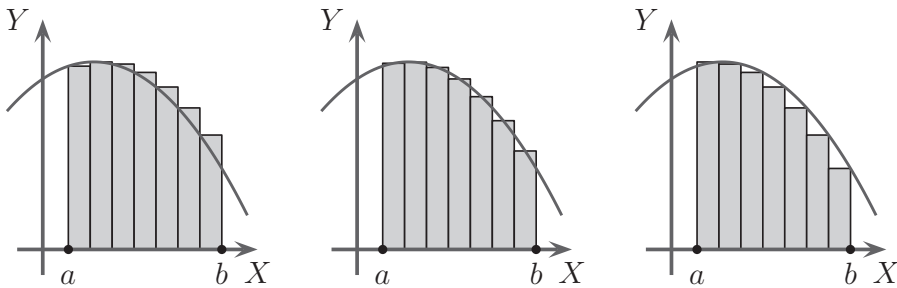


Figura 8.1: Tres sumas de Riemann de la misma función  $f$  en  $[a, b]$ , con distintas escogencias de puntos de muestra.

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(f, n, *) &= f(x_1^*)(x_1 - x_0) + f(x_2^*)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_n^*)(x_n - x_{n-1}) \\ &= f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \dots + f(x_n^*)\Delta x = \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x. \end{aligned}$$

La integral de  $f$  sobre la 1-celda  $\mathcal{I}$ , que se escribe  $\int_{\mathcal{I}} f(x)dx$  o  $\int_a^b f(x)dx$ , es el límite de las sumas de Riemann cuando  $n$  tiende a infinito,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{R}(f, n, *) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x.$$

Este límite existe para funciones continuas y no depende de los puntos de muestra escogidos.

El principal resultado de esta teoría es El Teorema Fundamental del Cálculo:

- El valor de la integral de una función continua sobre un intervalo cerrado es igual a la diferencia entre los valores de una primitiva en los extremos del intervalo. (Este resultado permite darle la vuelta al problema de calcular sumas de Riemann de la función, cuando sea posible encontrar una primitiva.)

Se extiende de manera natural este concepto de integral a funciones de dos variables. Sea  $\mathcal{R}$  la 2-celda  $[a, b] \times [c, d]$ . Una *partición uniforme* de  $\mathcal{R}$ , se obtiene escogiendo particiones uniformes  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  y  $y_0 = c < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$  de las 1-celdas  $[a, b]$  y  $[c, d]$ , respectivamente, tales que  $x_{k+1} - x_k = (b - a)/n = \Delta x$ ,  $0 \leq k \leq n$ , y que  $y_{j+1} - y_j = (d - c)/m = \Delta y$ ,  $0 \leq j \leq m$ . Así, la 2-celda  $\mathcal{R}$  queda dividida en las  $nm$  2-celdas  $[x_k, x_{k+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ ,  $0 \leq k < n$ ,  $0 \leq j < m$ , cuyas áreas son iguales a  $\Delta A = (x_{k+1} - x_k)(y_{j+1} - y_j) = ((b - a)/n)((c - d)/m) = \Delta x \Delta y$ .

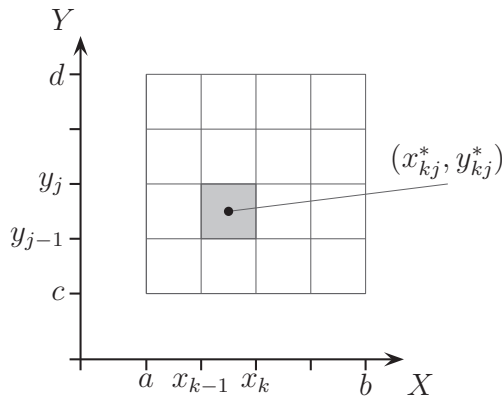


Figura 8.2

Al escoger un punto de muestra  $(x_{kj}^*, y_{kj}^*)$  en cada una de las  $mn$  2-celdas  $[x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$ , la suma de Riemann de la función continua  $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , correspondiente a esta partición y a esta escogencia de punto de muestra, está definida por

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{R}(f, n, m, *) \\
 &= f(x_{11}^*, y_{11}^*)\Delta A + f(x_{21}^*, y_{21}^*)\Delta A + \cdots + f(x_{n1}^*, y_{n1}^*)\Delta A \\
 &+ f(x_{12}^*, y_{12}^*)\Delta A + f(x_{22}^*, y_{22}^*)\Delta A + \cdots + f(x_{n2}^*, y_{n2}^*)\Delta A \\
 &\dots \\
 &+ f(x_{1m}^*, y_{1m}^*)\Delta A + f(x_{2m}^*, y_{2m}^*)\Delta A + \cdots + f(x_{nm}^*, y_{nm}^*)\Delta A \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{kj}^*, y_{kj}^*)\Delta A
 \end{aligned}$$

La integral de  $f$  sobre  $\mathcal{R}$  que se escribe  $\int_{\mathcal{R}} f dA$  es el límite de estas sumas de Riemann cuando  $n$  y  $m$  tienden a infinito:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{R}} f dA &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \mathfrak{R}(f, n, m, *) \\
 &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{kj}^*, y_{kj}^*)\Delta A.
 \end{aligned}$$

Este límite existe para funciones continuas y es independientemente de los puntos de muestra escogidos<sup>1</sup>.

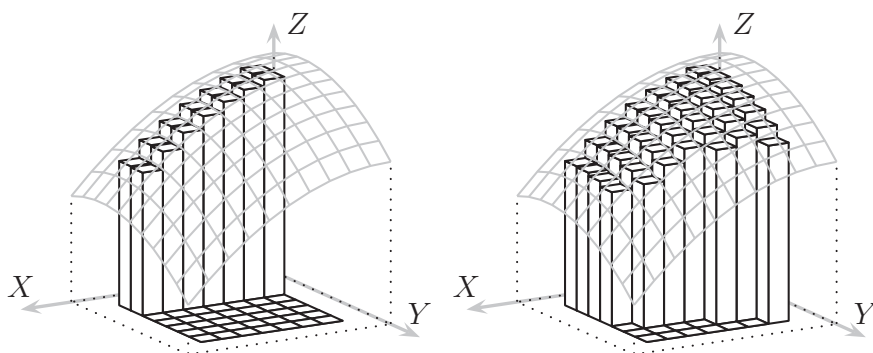


Figura 8.3: Representación de algunos términos de una suma de Riemann de una función  $f$  en una 2-celda

<sup>1</sup>La demostración de este teorema requiere del axioma de completitud del conjunto de los números reales. La integral es el supremo del conjunto de todas las sumas de Riemann de  $f$  en  $\mathcal{I}$



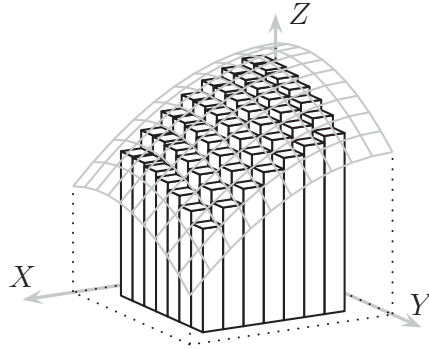


Figura 8.4: La representación de todos los términos de una suma de Riemann de una función  $f$  en una 2-celda.

Ahora, sea  $\mathcal{P}$  la 3-celda  $[a, b] \times [c, d] \times [e, h]$ . Una partición uniforme de  $\mathcal{P}$  se obtiene escogiendo particiones uniformes

$$\begin{aligned}x_0 &= a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \\y_0 &= c < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d, \\z_0 &= e < z_1 < z_2 < \dots < z_l = h,\end{aligned}$$

de las 1-celdas  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  y  $[e, h]$ , respectivamente. Así, la 3-celda  $\mathcal{P}$  queda dividida en las  $mn$ l 3-celdas  $[x_k, x_{k+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_i, z_{i+1}]$ ,  $0 \leq k < n$ ,  $0 \leq j < m$ ,  $0 \leq i < l$ , con el mismo volumen  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ . Al escoger un punto de muestra  $(x_{kji}^*, y_{kji}^*, z_{kji}^*)$  en cada 3-celda  $[x_k, x_{k+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_i, z_{i+1}]$ , la suma de Riemann de la función continua  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ , correspondiente a esta partición y a esta escogencia de punto de muestra, se define por

$$\mathfrak{R}(f, n, m, l, *) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l f(x_{kji}^*, y_{kji}^*, z_{kji}^*) \Delta V.$$

La integral de  $f$  sobre  $\mathcal{P}$ , que se escribe  $\int_{\mathcal{P}} f dV$ , es el límite de estas sumas de Riemann cuando  $n$ ,  $m$  y  $l$  tienden a infinito:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{P}} f dV &= \lim_{n, m, l \rightarrow \infty} \mathfrak{R}(f, n, m, l, *) \\ &= \lim_{n, m, l \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l f(x_{kji}^*, y_{kji}^*, z_{kji}^*) \Delta V\end{aligned}$$

Este límite existe para funciones continuas y es independientemente de los

puntos de muestra escogidos<sup>2</sup>.

El cálculo de integrales de funciones sobre 2-celdas o 3-celdas usando sumas de Riemann, es una tarea muy dispendiosa. Sin embargo, las sumas de Riemann son un instrumento muy útil de aproximación del valor estas integrales. Un método para calcular las integrales sin necesidad de recurrir a las sumas de Riemann consiste en escribir la integral como una integral iterada, es decir una secuencia de integrales parciales unidimensionales que se calcularán recurriendo al Teorema Fundamental del Cálculo. Para precisar lo dicho, dada la función continua  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ , se define  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\alpha(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ . Debido a que  $\alpha$  es continua, su integral

$$\int_a^b \alpha(x) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

existe, y se conoce como *integral iterada* de  $f$ . El Teorema de Fubini<sup>3</sup> establece que la integral de  $f$  sobre  $\mathcal{R}$  es igual a ésta integral iterada. Explícitamente, si  $f$  es continua en  $\mathcal{R}$  se tiene que

$$\int_{\mathcal{R}} f dA = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

El Teorema de Fubini para una función continua  $f$  definida en una 3-celda  $\mathcal{P} = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$  dice que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} f dV &= \int_a^b \left( \int_c^d \left( \int_e^h f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left( \int_e^h \left( \int_c^d f(x, y, z) dy \right) dz \right) dx \\ &= \int_e^h \left( \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz \\ &= \dots \end{aligned}$$

los puntos suspensivos son para las otras tres integrales iteradas que faltan (¿cuáles?).

<sup>2</sup>Vea la nota de pie de página anterior.

<sup>3</sup>Puede consultar la demostración de este teorema en Apostol T.M., Análisis Matemático, Editorial Reverté, 1976, p.501

Para dar cuenta de integrales de funciones con dominios más generales que las  $k$ -celdas, se recurre a la parametrización (vea Lección 3), concepto que no es muy utilizado en libros de cálculo pero que resulta más natural.

Sean  $f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, definida en una superficie  $\sigma$  del espacio y  $\mathbf{r} : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{r}(u, v) = \langle x(u, v), y(u, v), z(u, v) \rangle$ , una parametrización de  $\sigma$ . Supondremos además que  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  y  $z = z(u, v)$  tienen derivadas parciales continuas en  $(a, b) \times (c, d)$ .

Una partición de la superficie  $\sigma$  en  $mn$  trozos de superficie  $\sigma_{ij}$  se obtiene a partir de una partición de  $[a, b] \times [c, d]$  en  $mn$  2-celdas  $\mathcal{R}_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ :

$$\sigma_{ij} = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : (u, v) \in [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]\}.$$

Se escoge el punto  $P_{ij}(x(u_{i-1}, v_{j-1}), y(u_{i-1}, v_{j-1}), z(u_{i-1}, v_{j-1}))$  en cada trozo de superficie  $\sigma_{ij}$ . La suma de Riemann de  $f$  sobre  $\sigma$ , con respecto a la parametrización  $\mathbf{r}$  y a la partición de  $\sigma$ , está definida por

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(f, m, n, \mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}) \|\Delta u \mathbf{r}_u \times \Delta v \mathbf{r}_v\|, \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \Delta u \Delta v, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{r}_u$  y  $\mathbf{r}_v$  son las derivadas parciales de  $\mathbf{r}$  con respecto a  $u$  y a  $v$  evaluadas en  $P_{ij}$ , respectivamente. Obsérvese que  $\|\Delta u \mathbf{r}_u \times \Delta v \mathbf{r}_v\|$  es el área del paralelogramo generado por los vectores  $\Delta u \mathbf{r}_u(P_{ij})$  y  $\Delta v \mathbf{r}_v(P_{ij})$ , que es una aproximación del área del trozo de superficie  $\sigma_{ij}$ .

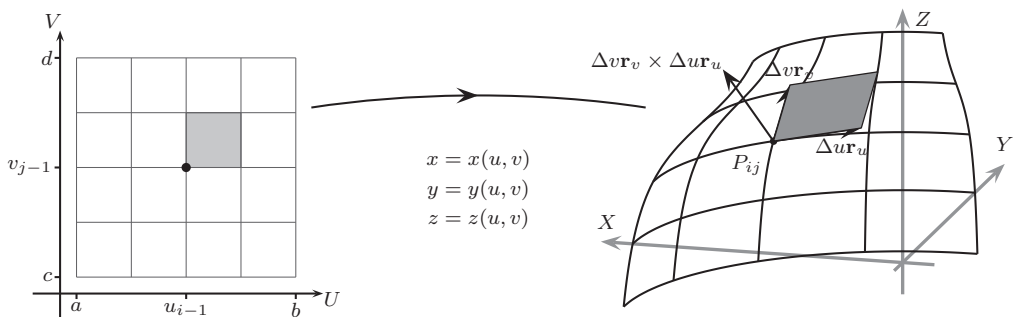


Figura 8.5: A la izquierda se representa una partición de la 2-celda  $[a, b] \times [c, d]$  y la subcelda gris  $\mathcal{R}_{ij}$ . A la derecha se representa la correspondiente partición de  $\sigma$ , el trozo  $\sigma_{ij}$  bajo el paralelogramo gris determinado por los vectores tangentes  $\Delta u \mathbf{r}_u$  y  $\Delta v \mathbf{r}_v$ , y el vector  $\Delta u \mathbf{r}_u \times \Delta v \mathbf{r}_v$ .

La integral de  $f$  sobre  $\sigma$  es el límite de  $\mathfrak{R}(f, m, n, \mathbf{r})$  cuando  $m$  y  $n$  tienden a infinito:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} f dA &= \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{i,j}) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \Delta u \Delta v \\ &= \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dudv \end{aligned}$$

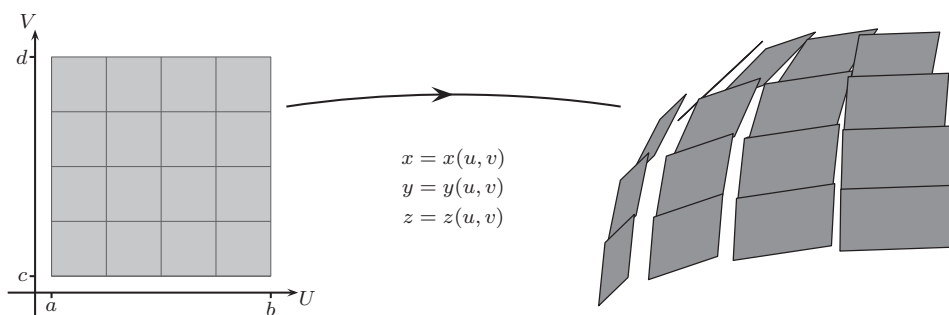


Figura 8.6: A la izquierda se ha representado una partición de la 2-celda  $[a, b] \times [c, d]$ . A la derecha se ha representado la colección de paralelogramos determinados por los vectores  $\Delta u \mathbf{r}_u$  y  $\Delta v \mathbf{r}_v$  tangentes a la superficie  $\sigma$  en cada uno de los puntos  $P_{ij}$ . Las áreas de estos paralelogramos son las que intervienen en la suma de Riemann de  $f$  sobre  $\sigma$  correspondiente a la partición dada.

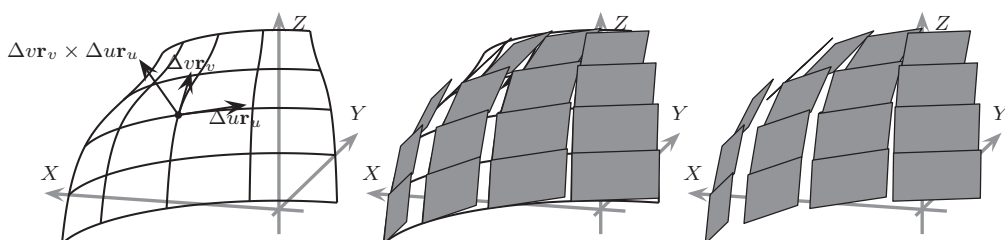


Figura 8.7: La primera gráfica de la figura representa una partición de la superficie  $\sigma$  junto con un par de vectores tangentes y su producto vectorial, determinados por la parametrización de  $\sigma$ . La siguiente gráfica ilustra los paralelogramos determinados por los pares de vectores tangentes en cada uno de los puntos  $P_{ij}$  y cuyas áreas aproximan el área de la superficie. La tercera gráfica de la figura representa la misma colección de paralelogramos abstrayendo la superficie.

Se ilustra lo anterior calculando la integral de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  sobre la superficie de la esfera  $\sigma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ . Una parametrización de  $\sigma$  es  $\mathbf{r}(u, v) = \langle 2 \cos u \cos v, 2 \sin u \cos v, 2 \sin v \rangle$ ,  $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ . Es

claro que

$$\sigma = \{(2 \cos u \sin v, 2 \sin u \sin v, 2 \cos v) : (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]\}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= \\ &= \|\langle -2 \sin u \sin v, 2 \cos u \sin v, 0 \rangle \times \langle 2 \cos u \cos v, 2 \sin u \cos v, -2 \sin v \rangle\| \\ &= 4 \sin v, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\int_{\sigma} f dA = \iint_{[0, \pi] \times [0, 2\pi]} 16 \sin v \, du dv = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi} 16 \sin v \, dv \right) du = 64\pi.$$

Si el dominio de  $f$  es una superficie  $\sigma$  en el plano, se procede exactamente de la misma manera como se hizo en el caso de superficies en el espacio, como se ilustra calculando la integral de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  sobre el disco  $\sigma = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ . Usando la parametrización de  $\sigma$  que se dió en la lección 3, setiene que

$$\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = \|\langle \cos v, \sin v \rangle \times \langle -u \sin v, u \cos v \rangle\| = u,$$

y por lo tanto,

$$\int_{\sigma} f dA = \iint_{[0, 2] \times [0, 2\pi]} u^2 u \, du dv = \int_0^2 \left( \int_0^{2\pi} u^3 \, dv \right) du = 8\pi.$$

Obsérvese que si  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $\mathbf{r} : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$  está definida por  $\mathbf{r}(u, v) = \langle u, v \rangle$ , entonces  $\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = 1$ , y por consiguiente

$$\int_{[a, b] \times [c, d]} f dA = \iint_{[a, b] \times [c, d]} f(u, v) \, du dv.$$

Es decir, las integrales sobre 2-celdas son un caso particular de integrales sobre superficies planas más generales.

De manera similar a la que se usó para definir la integral de una función sobre una superficie, se puede definir la integral de una función definida sobre un

sólido. Sea  $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, donde  $\Lambda$  es un sólido del espacio y  $\mathbf{r} : [a, b] \times [c, d] \times [e, h] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{r}(u, v, w) = \langle x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w) \rangle$ , una parametrización de  $\Lambda$ , donde las funciones  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$ ,  $z = z(u, v, w)$  tiene derivadas parciales continuas en  $(a, b) \times (c, d) \times (e, h)$ .

Una partición del sólido  $\Lambda$  en trozos de sólido  $\Lambda_{ijk}$

$$\Lambda_{ijk} = \{(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) : (u, v, w) \in \mathcal{R}_{ijk}\},$$

se obtiene a partir de una partición de  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$  en 3-celdas  $\mathcal{R}_{ijk} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j] \times [w_{k-1}, w_k]$ . Al escoger en cada trozo de sólido  $\Lambda_{ijk}$  el punto

$$P_{ijk}(x(u_{i-1}, v_{j-1}, w_{k-1}), y(u_{i-1}, v_{j-1}, w_{k-1}), z(u_{i-1}, v_{j-1}, w_{k-1})),$$

la suma de Riemann de  $f$  sobre  $\Lambda$  con respecto a la parametrización  $\mathbf{r}$  y a la partición de  $\Lambda$  en  $mnl$  trozos de sólido, está definida por

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(f, m, n, l, \mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l f(P_{ijk}) |(\Delta u \mathbf{r}_u \times \Delta v \mathbf{r}_v) \cdot \Delta w \mathbf{r}_w| \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l f(P_{ijk}) |(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_w| \Delta u \Delta v \Delta w, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{r}_u$ ,  $\mathbf{r}_v$  y  $\mathbf{r}_w$  son los vectores cuyas componentes son las derivadas parciales con respecto a  $u$ , a  $v$  y a  $w$  de las componentes de  $\mathbf{r}$  en  $P_{ijk}$ , respectivamente. Obsérvese que  $|(\Delta u \mathbf{r}_u \times \Delta v \mathbf{r}_v) \cdot \Delta w \mathbf{r}_w|$  es el volumen del paralelepípedo generado por  $\Delta u \mathbf{r}_u$ ,  $\Delta v \mathbf{r}_v$  y  $\Delta w \mathbf{r}_w$ , que es una aproximación del volumen del trozo de sólido  $\Lambda_{ijk}$ .

La integral de  $f$  sobre  $\Lambda$  con respecto a  $\mathbf{r}$  es el límite de  $\mathfrak{R}(f, m, n, l, \mathbf{r})$  cuando  $m$ ,  $n$  y  $l$  tienden a infinito:

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} f dV &= \\ &= \lim_{m, n, l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l f(P_{ijk}) |(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_w| \Delta u \Delta v \Delta w \\ &= \iiint_{[a, b] \times [c, d] \times [e, h]} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_w| du dv dw \end{aligned}$$

Nótese que si  $f : [a, b] \times [c, d] \times [e, h] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $\mathbf{r} : [a, b] \times [c, d] \times [e, h] \rightarrow \mathbb{R}^3$  está definida por  $\mathbf{r}(u, v, w) = \langle u, v, w \rangle$ , entonces  $|(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_w| = 1$ , y por consiguiente

$$\int_{[a,b] \times [c,d] \times [e,h]} f dV = \iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [e,h]} f(u, v, w) du dv dw,$$

lo que quiere decir que las integrales sobre 3-celdas son un caso particular de integrales sobre sólidos más generales.

Para ilustrar lo anterior, se calcula la integral de la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  sobre la esfera  $\Lambda = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ . Usando la parametrización de este sólido que se dió en la Lección 3, se tiene que

$$\begin{aligned} |(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_w| &= \\ &= |(\langle \cos v \sin w, \sin v \sin w, \cos w \rangle \times \langle -u \sin v \sin w, u \cos v \sin w, 0 \rangle) \\ &\quad \cdot \langle u \cos v \cos w, u \sin v \cos w, -u \sin w \rangle| \\ &= u^2 \sin w, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} f dV &= \\ &= \iiint_{[0,2] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]} u^2 u^2 \sin w du dv dw \\ &= \int_0^2 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi u^4 \sin w dw \right) dv \right) du \\ &= 128\pi/5. \end{aligned}$$

Por último, se estudia la integral de una función definida sobre una curva. Sea  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, definida en una curva acotada  $\Gamma$  del espacio (o del plano) con parametrización  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{r}(u) = \langle x(u), y(u), z(u) \rangle$ , continua, inyectiva y derivable en  $(a, b)$ .

Una partición de  $\Gamma$  en trozos de curva  $\Gamma_i$ ,

$$\Gamma_i = \{(x(u), y(u), z(u)) : u \in [u_{i-1}, u_i]\},$$

se obtiene a partir de una partición de  $\mathcal{I} = [a, b]$  en 1-celdas  $\mathcal{I}_i = [u_{i-1}, u_i]$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Se escoje en cada trozo  $\Gamma_i$  el punto  $P_i(x(u_{i-1}), y(u_{i-1}), z(u_{i-1}))$  y se define la suma de Riemann de  $f$  sobre  $\Gamma$  con respecto a la parametrización  $\mathbf{r}$  y a la partición de  $\Gamma$  en  $m$  trozos, por

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(f, m, \mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^m f(P_i) \|\Delta u \mathbf{r}'(u_{i-1})\|, \\ &= \sum_{i=1}^m f(P_i) \|\mathbf{r}'(u_{i-1})\| \Delta u, \end{aligned}$$

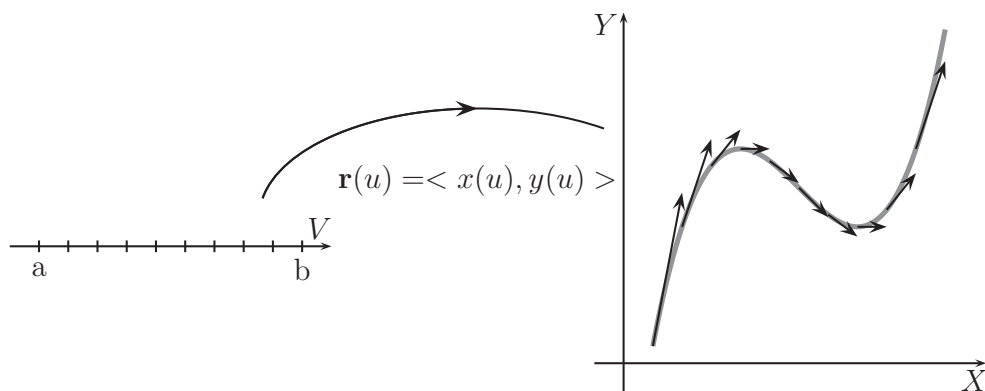


Figura 8.8: A la izquierda se representa una partición de la 1-celda  $[a, b]$  y a la derecha la curva  $\Gamma$  parametrizada por  $\mathbf{r}$  junto con los vectores tangentes  $\Delta u \mathbf{r}'(u_{i-1})$  cuyas longitudes aproximan las longitudes de los trozos  $\Gamma_i$ .

donde  $\mathbf{r}'(u_{i-1})$  es la derivada de  $\mathbf{r}$  en  $P_i$ . La aparición de  $\|\Delta u \mathbf{r}'(u_{i-1})\|$  en la suma de Riemann se debe a que ésta es la longitud del vector tangente  $\Delta u \mathbf{r}'(u_{i-1})$  que es una aproximación de la longitud del trozo  $\Gamma_i$ .

La integral de  $f$  sobre  $\Gamma$  con respecto a  $\mathbf{r}$  es el límite de  $\mathfrak{R}(f, m, \mathbf{r})$  cuando  $m$  tiende a infinito:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f dL &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m f(P_i) \|\mathbf{r}'(u_{i-1})\| \Delta u \\ &= \int_{[a,b]} f(x(u), y(u), z(u)) \|\mathbf{r}'(u)\| du. \end{aligned}$$



Ilustramos lo anterior calculando la integral de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  sobre la circunferencia  $\Gamma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, z = 5\}$ . Una parametrización de  $\Gamma$  está dada por la función vectorial  $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $\mathbf{r}(u) = \langle 2 \cos u, 2 \operatorname{sen} u, 5 \rangle$ . Obsérvese que

$$\Gamma = \{(2 \cos u, 2 \operatorname{sen} u, 5) : u \in [0, 2\pi]\}.$$

Como

$$\|\mathbf{r}'\| = \|\langle -2 \operatorname{sen} u, 2 \cos u, 0 \rangle\| = 2,$$

se tiene que,

$$\int_{\Gamma} f \, dL = \int_{[0, 2\pi]} 29 \cdot 2 \, du = \int_0^{2\pi} 58 \, du = 116\pi.$$

## EJERCICIOS

1. Calcule la suma de Riemann  $\mathfrak{R}(f, n, m, *)$  para la función  $f(x, y) = x^2y + y$ , en la 2-celda  $[2, 4] \times [1, 5]$ ,  $m = 4$ ,  $n = 5$  tomando como punto muestra el centro de cada subcelda.

2. Calcule las siguientes integrales iteradas.

$$(a) \int_0^1 \int_2^3 \int_1^2 x^2 y^2 z^2 dz dy dx$$

$$(b) \int_1^2 \int_0^3 (x^2 y + xy^3) dy dx$$

$$(c) \int_0^1 \int_2^4 \left( \frac{x}{y} + \sqrt[3]{x^2} \right) dy dx$$

$$(d) \int_0^1 \int_0^{\pi/4} (r \cos \theta - \tan \theta) d\theta dr$$

$$(e) \int_a^b \int_c^d \sqrt{s^2 + t^2} ds dt$$

3. Parametrice la superficie plana limitada por las curvas dadas, de manera que el dominio de la parametrización sea una 2-celda.

$$(a) y = x, y = 0, x = 2$$

$$(b) y = x^2, x = 0, y = 4$$

$$(c) y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$(d) x = -\sqrt{1 - y^2}, x = 0$$

$$(e) y = 3x + 2, y = x + 4, x = 0$$

$$(f) y = x^2, y = \sqrt{x}$$

$$(g) x + y = 3, x + y = 7, x - y = 4, x - y = 1.$$

4. Sean  $\sigma_1$  la superficie de la esfera con centro en el origen y radio 2 y  $\sigma_2$  la superficie cónica de ecuación  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , parametrice cada uno de los objetos geométricos del espacio de manera que el dominio de los parámetros sea una 1-celda, una 2-celda o una 3-celda, dependiendo de la naturaleza del objeto.

(a) La superficie  $\sigma_1$ .

(b) El sólido limitado por  $\sigma_1$ .

- (c) La parte de la superficie  $\sigma_1$  que está dentro de la superficie cónica  $\sigma_2$ .
- (d) La parte de la superficie cónica que se encuentra dentro de la esfera.
- (e) La curva de intersección de las dos superficies.
- (f) El sólido delimitado por  $\sigma_1$  que está fuera<sup>4</sup> de  $\sigma_2$ ,
5. Sea  $\sigma$  es la parte del plano de ecuación  $2x + 4y + 3z = 6$  que se encuentra en el primer octante, parametrize cada uno de los conjuntos del espacio de manera que el dominio de la parametrización sea una 1-celda, una 2-celda o una 3-celda, dependiendo de la naturaleza del objeto geométrico.
- (a) La superficie  $\sigma$ .
- (b) El sólido limitado por la superficie  $\sigma$  y los planos coordenados.
- (c) El borde de  $\sigma$ .
6. Escriba cada integral como una integral sobre una 1-celda, una integral iterada sobre una 2-celda o una integral iterada sobre una 3-celda, dependiendo de la naturaleza del objeto geométrico.
- (a)  $\int_{\Gamma} (x + y) dL$  donde  $\Gamma$  es el borde de la superficie del numeral 3c.
- (b)  $\int_{\Gamma} (x + y) dL$  donde  $\Gamma$  es la curva del numeral 3e.
- (c)  $\int_{\Gamma} (x + y + z) dL$  donde  $\Gamma$  es la curva del numeral 5c.
- (d)  $\int_{\sigma} (x + y) dA$  donde  $\sigma$  es la superficie del numeral 3c.
- (e)  $\int_{\sigma} (x + y) dA$  donde  $\sigma$  es la superficie del numeral 3d.
- (f)  $\int_{\sigma} (x + y) dA$  donde  $\sigma$  es la superficie del numeral 3f.
- (g)  $\int_{\sigma} (x + y) dA$  donde  $\sigma$  es la superficie del numeral 3g.
- (h)  $\int_{\sigma} (x + y + z) dA$  donde  $\sigma$  es la superficie del numeral 4a.
- (i)  $\int_{\sigma} (x + y + z) dA$  donde  $\sigma$  es la superficie del numeral 4c.
- (j)  $\int_{\sigma} (x + y + z) dA$  donde  $\sigma$  es la superficie del numeral 4d.
- (k)  $\int_{\sigma} (x + y + z) dA$  donde  $\sigma$  es la superficie del numeral 5a.
- (l)  $\int_{\Lambda} (x + y + z) dV$  donde  $\Lambda$  es sólido del numeral 4b.
- (m)  $\int_{\Lambda} (x + y + z) dV$  donde  $\Lambda$  es sólido del numeral 4f.
- (n)  $\int_{\Lambda} (x + y + z) dV$  donde  $\Lambda$  es sólido del numeral 5b.

---

<sup>4</sup>Un punto  $(x, y, z)$  está fuera de  $\sigma_2$  si  $z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

7. Use los teoremas de Clairaut y de Fubini<sup>5</sup>

(a) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$  y para  $a < x < b$  y  $c < y < d$ , defínase  $F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(u, v) du dv$ . Demuestre que  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ . Use este ejemplo para establecer la relación que existe entre el teorema de Clairaut y el de Fubini.

(b) Calcule el valor de cada una de las siguientes integrales

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)} dx dy \quad \text{y} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)} dy dx$$

¿Contradice el resultado el teorema de Fubini?

8. Explique por qué el volumen del sólido limitado por la superficie de ecuación  $z = f(x, y)$ , el plano  $z = 0$  cuando  $(x, y) \in \mathcal{R}$ , siendo  $\mathcal{R}$  una 2-celda, está dado por la integral doble  $\int_{\mathcal{R}} f(x, y) dA$ .

9. Calcule el volumen del sólido limitado por la superficie de ecuación  $z = f(x, y)$ , el plano  $z = 0$  cuando  $(x, y) \in \mathcal{R}$ :

(a)  $f(x, y) = 4xy$ ,  $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 1]$

(b)  $f(x, y) = e^{x+y}$ ,  $\mathcal{R} = [0, 1] \times [-1, 1]$

(c)  $f(x, y) = x^3 + y^2$ ,  $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 1]$

(d)  $f(x, y) = x^4 + xy + y^3$ ,  $\mathcal{R} = [1, 2] \times [0, 2]$

10. Evalúe las siguientes integrales dobles:

(a)  $\int_{[0,1] \times [1,2]} (1 - y)x^2 dx dy$

(b)  $\int_{[0,1] \times [0,2]} x(x + y) dx dy$

(c)  $\int_{[0,2] \times [0,1]} (x + 2) dx dy$

(d)  $\int_{[-1,2] \times [-1,1]} x(xy + \sin x) dx dy$

<sup>5</sup>Teorema de Clairaut. Si  $f : \sigma \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $\sigma$  es un disco que contiene al punto  $(a, b)$ , en el cual  $f_{xy}$  y  $f_{yx}$  son continuas, entonces  $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ .

Teorema de Fubini. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua en la 2-celda  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ . Entonces  $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_{\mathcal{R}} f dA$

$$(e) \int_{[0, \pi/2] \times [0, 1]} xy \cos(x^2 y) dx dy \quad (f) \int_{[-1, 1] \times [-1, 2]} 1 dx dy$$

$$(g) \int_{[0, \pi] \times [0, \pi/2]} \operatorname{sen} x \cos(y - \pi) dx dy \quad (h) \int_{[0, 2] \times [1, 4]} xy dx dy$$

11. Si  $M$  es una constante muestre que  $\int_c^d \int_a^b M dx dy = M(d - c)(b - a)$ .

12. Evalúe las siguientes integrales iteradas y dibuje la superficie sobre la que se integra, si la integral iterada corresponde a una integral doble:

$$(a) \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 24x^2 y dy dx \quad (b) \int_0^\pi \int_0^y \sin x dx dy$$

$$(c) \int_1^2 \int_0^{\ln x} 4x dy dx \quad (d) \int_0^2 \int_0^{2y} e^{y^2} dx dy$$

$$(e) \int_0^{\pi/2} \int_0^y \cos x \sin y dx dy \quad (f) \int_0^\infty \int_0^\infty xy e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$(g) \int_0^2 \int_0^y 1 dx dy \quad (h) \int_0^1 \int_0^{x^2} 2 dy dx$$

13. Calcule el volumen del sólido delimitado por los tres planos coordenados y el plano  $x + y + z = 1$ .

14. Calcule el volumen del sólido delimitado por los tres planos coordenados y el plano  $3x + 2y + 5z = 6$ .

15. Explique por qué la integral  $\int_\sigma 1 dA$  es el área de la superficie  $\sigma$ .

16. Demuestre que el volumen de un tetraedro con tres aristas adyacentes mutuamente perpendiculares de longitudes  $a$ ,  $b$ , y  $c$  es  $\frac{abc}{6}$ .

17. Evalúe las siguientes integrales iteradas y dibuje el sólido sobre la que se integra, si la integral iterada corresponde a una integral triple:

$$(a) \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 xyz dx dy dz \quad (b) \int_0^1 \int_0^x \int_0^y xyz dz dy dx$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{(c)} \int_0^\pi \int_0^x \int_0^{xy} x^2 \sin z \, dz \, dy \, dx & \text{(d)} \int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{y^2} \, dx \, dy \, dz \\
 \text{(e)} \int_1^e \int_0^y \int_0^{1/y} x^2 z \, dx \, dz \, dy & \text{(f)} \int_1^2 \int_0^{y^2} \int_0^{z^2} yz \, dx \, dz \, dy \\
 \text{(g)} \int_1^2 \int_2^4 \int_0^3 1 \, dx \, dy \, dz & \text{(h)} \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1 \, dz \, dy \, dx
 \end{array}$$

18. Si  $M$  es una constante. muestre que

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} M \, dx \, dy \, dz = M(z_2 - z_1)(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)$$

19. Calcule el volumen del sólido  $\Lambda$  en el primer octante delimitado por encima por el plano  $x + y + z = 2$ , y por debajo por el plano  $z = x + y$ .

20. Muestre que 
$$\int_a^b \int_a^z \int_a^y f(x) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \frac{(b-x)^2}{2} f(x) \, dx.$$

21. Escriba un programa que use el método de Monte Carlo para aproximar la integral  $\int_{\mathcal{R}} e^{xy} \, dA$ , donde  $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 1]$ . Muestre el resultado del programa para  $N = 10, 100, 1000, 10000, 100000$  y  $1000000$  puntos aleatorios.

22. Escriba un programa que use el método de Monte Carlo para aproximar la integral triple  $\int_{\mathcal{P}} e^{xyz} \, dV$ , donde  $\mathcal{P} = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ . Muestre el resultado del programa para  $N = 10, 100, 1000, 10000, 100000$  y  $1000000$  puntos aleatorios.

23. Calcule el volumen de los siguientes sólidos:

- Delimitado por las superficies de ecuaciones  $z = x^2 + y^2$  y  $z = 4$ .
- Delimitado por las superficies de ecuaciones  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $z = 3$ .
- Cuyos puntos  $(x, y, z)$  satisfacen las desigualdades

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

- Cuyos puntos  $(x, y, z)$  satisfacen las desigualdades

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \quad \text{y} \quad z \geq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

(e) Delimitado por las superficies de ecuaciones

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad z^2 = 4(x^2 + y^2).$$

(f) Cuyos puntos  $(x, y, z)$  satisfacen las desigualdades

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq z \leq 2.$$

24. Calcule  $\int_{\sigma} \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) dA$ , donde  $\sigma$  es el triángulo con vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  y  $(1, 1)$ .

25. Muestre que el volumen del sólido delimitado por el elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  es  $\frac{4\pi abc}{3}$ .

26. Muestre que la *función Beta* definida por

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad \text{para } x > 0, y > 0,$$

satisface la relación  $B(y, x) = B(x, y)$  para  $x > 0, y > 0$ .

27. Use la sustitución  $t = u/(u+1)$ , para mostrar que la función Beta se puede escribir como

$$B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}} du, \quad \text{para } x > 0, y > 0.$$

28. Las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  del centro de masa de una lámina delgada modelada por la superficie  $\sigma$  cuya densidad en cada uno de sus puntos es  $\delta$ , están dadas por

$$\bar{x} = \frac{\int_{\sigma} x\delta dA}{\int_{\sigma} \delta dA} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{\int_{\sigma} y\delta dA}{\int_{\sigma} \delta dA}.$$

Determine las coordenadas del centro de masa en cada uno de los siguientes casos:

(a)  $\sigma = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}, \quad \delta = 2y$

(b)  $\sigma = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}, \quad \delta = x + y$

- (c)  $\sigma = \{(x, y) : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}, \quad \delta = 1$   
 (d)  $\sigma = \{(x, y) : y \geq 0, x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}, \quad \delta = \sqrt{x^2 + y^2}$   
 (e)  $\sigma = \{(x, y) : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad \delta = y$   
 (f) Una lámina delgada modelada por la superficie  $\sigma$  delimitada por las curvas de ecuaciones  $x = y^2$  y  $x = 2y - y^2$  si la densidad en cada uno de sus puntos está dada por  $\delta = y + 1$ .  
 (g) Una lámina delgada modelada por la superficie  $\sigma$  del cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  cuyos puntos satisfacen la desigualdad  $x^2 + y^2 \leq 2x$  y su densidad es constante.

29. Las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  del centro de masa de un objeto modelado por el sólido  $\Lambda$  cuya densidad en cada uno de sus puntos es  $\delta$ , están dadas por

$$\bar{x} = \frac{\int_{\Lambda} x \delta dV}{\int_{\Lambda} \delta dV}, \quad \bar{y} = \frac{\int_{\Lambda} y \delta dV}{\int_{\Lambda} \delta dV} \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{\int_{\Lambda} z \delta dV}{\int_{\Lambda} \delta dV}.$$

Determine las coordenadas del centro de masa en cada uno de los siguientes casos:

- (a)  $\Lambda = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}, \quad \delta = xyz$   
 (b)  $\Lambda = \{(x, y, z) : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}, \quad \delta = x^2 + y^2 + z^2$   
 (c)  $\Lambda = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}, \quad \delta = 1$   
 (d)  $\Lambda = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}, \quad \delta = x^2 + y^2 + z^2$   
 (e)  $\Lambda = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}, \quad \delta = 1$   
 (f) Un objeto modelado por el sólido delimitado por las superficies  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y por el plano  $z = 1$  si la densidad en cada uno de sus puntos está dada por  $\delta = z^2$ .  
 (g) Un objeto modelado por el elipsoide sólido  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  si la densidad en cada uno de sus puntos está dada por  $\delta = z$

30. Calcule la integral  $J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ . (Ayuda: obsérvese que  $J^2 = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)} dA$ ; calcule  $J^2$  parametrizando  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  mediante coordenadas polares).

31. Para  $\sigma > 0$  y  $\mu > 0$ , evalúe  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$ .

32. Calcule la longitud de cada una de las siguientes curvas:



- (a) La parte de la parábola en el plano  $XY$  de ecuación  $y = x^2$  desde el punto  $(-1, 1)$  hasta el punto  $(2, 4)$ .
- (b) La parte de la hélice de ecuación  $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$  desde el punto  $(1, 0, 0)$  hasta el punto  $(1, 0, 2\pi)$ .
- (c) La elipse en el plano  $XY$  de ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
33. Las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  del centro de masa de un alambre delgado modelado por una curva  $\Gamma$  y cuya densidad en cada uno de sus puntos es  $\delta$ , están dadas por

$$\bar{x} = \frac{\int_{\Gamma} x\delta dL}{\int_{\Gamma} \delta dL}, \quad \bar{y} = \frac{\int_{\Gamma} y\delta dL}{\int_{\Gamma} \delta dL} \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{\int_{\Gamma} z\delta dL}{\int_{\Gamma} \delta dL}.$$

Determine el centro de masa de un alambre delgado modelado mediante la curva parametrizada por  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (\frac{2}{3})t^{3/2}\mathbf{k}$ ,  $0 \leq t \leq 2$ , si la densidad en cada uno de sus puntos es  $\delta = 3\sqrt{5+t}$ .

34. Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable, no negativa y su gráfica en el plano  $XY$  se gira alrededor del eje  $X$  en  $\mathbb{R}^3$ , se genera una superficie  $\sigma$ . Demuestre que el área de  $\sigma$  es

$$2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1+(f'(t))^2}dt.$$

35. Sean,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  abierto,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con derivadas parciales contiuas y  $\sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$ . Parametrice  $\sigma$ , encuentre el elemento de área correspondiente y demuestre que

$$\int_{\Omega} \frac{dA}{\cos \theta} = \int_{\Omega} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA$$

siendo  $\theta = \theta(x, y, z)$  el ángulo que un vector normal a  $\sigma$ , en el punto  $(x, y, z)$ , con tercera componente positiva, forma con el eje  $Z$ .

## LECCIÓN 9

---

### Integrales múltiples

---

En este capítulo se deducirá una forma de calcular integrales múltiples de funciones reales sobre algunos tipos especiales de dominios.

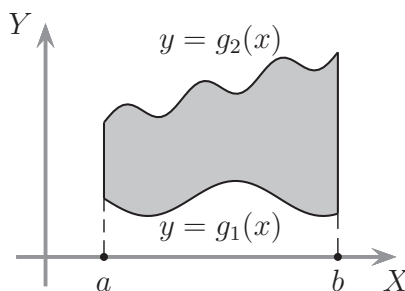


Figura 9.1:  $\sigma = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$  es una región de tipo I.

Se estudiarán dos tipos de dominios del plano denominados regiones del tipo I y regiones del tipo II. Las regiones del tipo I son aquellas superficies del plano limitadas por rectas  $x = a$  y  $x = b$  y por las gráficas de dos funciones diferenciables  $g_1$  y  $g_2$  definidas en  $[a, b]$ .

Las *regiones del tipo I* son superficies planas de la forma:

$$\sigma = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

De acuerdo con lo estudiado en la Lección 3, una parametrización de esta superficie  $\sigma$  es  $\mathbf{r} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle u, (1 - v)g_1(u) + vg_2(u) \rangle.$$

Si  $f : \sigma \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, definida en la superficie  $\sigma$  entonces

$$\int_{\sigma} f dA = \int_{[a,b] \times [c,d]} f(x(u, v), y(u, v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dudv.$$

Se tiene así que

$$\mathbf{r}_u = \langle 1, (1 - v)g_1'(u) + vg_2'(u) \rangle,$$

$$\mathbf{r}_v = \langle 0, g_2(u) - g_1(u) \rangle,$$

y por consiguiente que

$$\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = g_2(u) - g_1(u).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} f dA &= \int_{[a,b] \times [0,1]} f(u, (1 - v)g_1(u) + vg_2(u)) (g_2(u) - g_1(u)) dudv \\ &= \int_a^b \left( \int_0^1 f(u, (1 - v)g_1(u) + vg_2(u)) (g_2(u) - g_1(u)) dv \right) du. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $y = (1 - v)g_1(u) + vg_2(u)$  y tomando  $x = u$  se obtiene

$$\int_{\sigma} f dA = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Las *regiones del tipo II* son aquellas superficies del plano limitadas por las rectas  $y = c$  y  $y = d$  y por las gráficas de dos funciones diferenciables  $h_1$  y  $h_2$  definidas en  $[c, d]$ :

$$\sigma = \{(x, y) : h_1(y) \leq x \leq h_2(y), \quad c \leq y \leq d\},$$

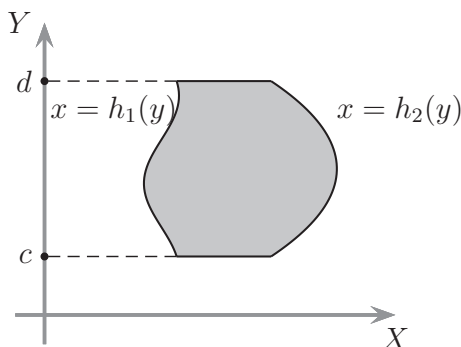


Figura 9.2:  $\sigma = \{(x, y) : h_1(y) \leq x \leq h_2(y), \quad c \leq y \leq d\}$  es una región de tipo II

Una parametrización de esta superficie es  $\mathbf{r} : [0, 1] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle (1 - u)h_1(v) + uh_2(v), v \rangle.$$

Si  $f : \sigma \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  es una función continua definida en  $\sigma$ , procediendo de manera análoga al caso anterior, se tiene que

$$\int_{\sigma} f dA = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Para sólidos en el espacio, se estudiarán aquí regiones del tipo I, del tipo II y del tipo III. Las *regiones de tipo I* son sólidos  $\Lambda$  determinados por una superficie  $\sigma$  del plano  $XY$  y por las gráficas de dos funciones diferenciables  $g_1$  y  $g_2$  definidas en  $\sigma$ , de la forma

$$\Lambda = \{(x, y, z) : (x, y) \in \sigma, \quad g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}.$$

Las *regiones del tipo II* son sólidos  $\Lambda$  determinados por una superficie  $\sigma$  del plano  $XZ$  y por las gráficas de dos funciones diferenciables  $h_1$  y  $h_2$  definidas en la superficie  $\sigma$ , de la forma

$$\Lambda = \{(x, y, z) : (x, z) \in \sigma, \quad h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z)\}.$$

Por último, las *regiones del tipo III* son sólidos  $\Lambda$  determinados por una superficie  $\sigma$  del plano  $YZ$  y por las gráficas de dos funciones diferenciables  $l_1$  y  $l_2$  definidas en la superficie  $\sigma$ , de la forma

$$\Lambda = \{(x, y, z) : (y, z) \in \sigma, \quad l_1(y, z) \leq x \leq l_2(y, z)\}.$$

Si se considera una función continua  $f : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$  donde  $\Lambda$  es uno de los sólidos anteriores en el que  $\sigma$  es una región del plano de uno de los tipos estudiados y

se parametriza de manera conveniente el sólido  $\Lambda$  se deduce que:

$$\int_{\Lambda} f dV = \int_{\sigma} \left( \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dA,$$

si  $\Lambda$  es del tipo I,

$$\int_{\Lambda} f dV = \int_{\sigma} \left( \int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x, y, z) dy \right) dA,$$

si  $\Lambda$  es del tipo II, y

$$\int_{\Lambda} f dV = \int_{\sigma} \left( \int_{l_1(y,z)}^{l_2(y,z)} f(x, y, z) dx \right) dA,$$

si  $\Lambda$  es del tipo III. En cada caso, la integral doble sobre  $\sigma$  se calculará de acuerdo con la naturaleza de  $\sigma$ .

## EJERCICIOS

1. Suponga que la densidad en cada punto de la placa delgada representada por las superficies de la figura 9.3 está dada por  $\delta(x, y) = x + y$

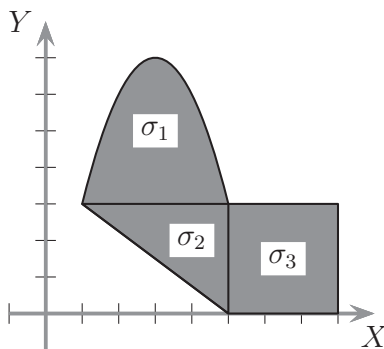


Figura 9.3: La superficie  $\sigma_1$  es un segmento parabólico (superficie plana encerrada por una parábola y una línea recta), la superficie  $\sigma_2$  es un triángulo y la superficie  $\sigma_3$  es un cuadrado.

- Determine el centro de masa de la placa delgada representada por  $\sigma_1$ .
  - Determine el centro de masa de la placa delgada representada por  $\sigma_2$ .
  - Determine el centro de masa de la placa delgada representada por  $\sigma_3$ .
  - Determine el centro de masa de la placa delgada representada por  $\sigma_1 \cup \sigma_2$ .
  - Determine el centro de masa de la placa delgada representada por  $\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3$ .
  - Dé una forma general para determinar el centro de masa de una placa delgada que es la unión no traslapada de  $n$  placas delgadas, en términos del centro de masa de cada una de las placas que la componen.
2. Calcule cada una de las siguientes integrales.

(a) 
$$\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x + y)^2 dx dy$$

(b) 
$$\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^2 e^{x^2} dx dy$$

$$(c) \int_{-3}^1 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} x dx dy$$

3. Toda función continua  $f$  definida en una 2-celda  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$  alcanza su valor máximo  $M$  y su valor mínimo  $m$  en puntos de  $\mathcal{R}$ . Además, si  $\varphi$  es otra función continua y no negativa definida en  $\mathcal{R}$ , se tiene que  $m\varphi(x, y) \leq G(x, y)\varphi(x, y) \leq M\varphi(x, y)$  para todo  $(x, y) \in \mathcal{R}$ . Por consiguiente,

$$m \int_{\mathcal{R}} \varphi(x, y) dA \leq \int_{\mathcal{R}} G(x, y)\varphi(x, y) dA \leq M \int_{\mathcal{R}} \varphi(x, y) dA,$$

desigualdad que se conoce como la *Desigualdad del valor medio*. Si  $\varphi$  no se anula en  $\mathcal{R}$ ,  $\int_{\mathcal{R}} \varphi(x, y) dA > 0$  y así, dividiendo a ambos lados de esta desigualdad por  $\int_{\mathcal{R}} \varphi(x, y) dA$ , se tiene que

$$m \leq \frac{\int_{\mathcal{R}} G(x, y)\varphi(x, y) dA}{\int_{\mathcal{R}} \varphi(x, y) dA} \leq M.$$

Por el *Teorema del valor intermedio*, existe  $(a, b) \in \mathcal{R}$  tal que

$$G(a, b) = \frac{\int_{\mathcal{R}} G(x, y)\varphi(x, y) dA}{\int_{\mathcal{R}} \varphi(x, y) dA}.$$

Este resultado se conoce como el *Teorema del valor medio para integrales dobles*.

Use la desigualdad del valor medio para demostrar que

- (a) Si  $\mathcal{R} = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$  entonces

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathcal{R}} e^{\text{sen}(x+y)} dA \leq e.$$

- (b) Si  $\mathcal{R} = [-1, 1] \times [-1, 2]$  entonces

$$1 \leq \int_{\mathcal{R}} \frac{dA}{x^2 + y^2 + 1} \leq 6.$$

4. Si  $\int_{\Lambda} f dV = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z) dz dy dx$ , dibuje el sólido  $\Lambda$  y plantee las otras 5 integrales triples iteradas correspondientes.

5. Calcular  $\int_{\Lambda} f \, dV$  si

(a)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-(x^2+y^2+z^2)}$  y  $\Lambda$  es el sólido limitado por las superficies de las esferas con centro en el origen y radios  $a$  y  $b$  respectivamente, tomando  $a < b$ .

(b)  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  y  $\Lambda$  es la esfera sólida con centro en el origen y radio 1.

(c)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  y

$$\Lambda = \left\{ (x, y, z) : \frac{1}{2} \leq z \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

6. Sea  $\Lambda$  el elipsoide sólido  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  donde  $a, b, c$  son positivos.

(a) Calcule el volumen de  $\Lambda$ .

(b) Calcule  $\int_{\Lambda} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dV$

7. Sea  $\sigma$  la superficie en el primer cuadrante del plano  $XY$  delimitada por las curvas de ecuaciones  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 2y$  y  $x = 0$ .

(a) Dibuje la superficie  $\sigma$ .

(b) Si  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  es una parametricación de  $\sigma$  con dominio  $\sigma^*$ , tal que  $u = x^2 + y^2$  y  $v = x^2 + y^2 - 2y$ , dibuje  $\sigma^*$ .

(c) Calcule  $\int_{\sigma} x e^y dA$  usando la parametrización  $\mathbf{r}$ .

8. Calcule la masa del sólido delimitado por las superficies de ecuación  $x^2 + y^2 = 2x$  y  $z^2 = x^2 + y^2$ , si la densidad en cada uno de sus puntos es  $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

9. El valor medio o promedio de los valores de una función  $f$  definida en un sólido  $\Lambda$  es el número  $\frac{1}{\text{vol}(\Lambda)} \int_{\Lambda} f \, dV$ . Calcule el valor medio de las siguientes funciones:

(a)  $f(x, y, z) = \text{sen}^2(\pi z) \cos^2(\pi x)$  en la 3-celda  $[0, 2] \times [0, 4] \times [0, 6]$ .

(b)  $f(x, y, z) = e^{-z}$  en la esfera sólida con centro en el origen y radio  $a$ .

10. Calcule  $\int_a^A \int_b^B \int_c^C f(x, y, z) dz dy dx$  si  $f(x, y, z) = F_{xyz}(x, y, z)$  y  $a, b, c, A, B, C$  son constantes.



11. Calcule  $\int_{\Lambda} x^m y^n z^p dV$  si  $\Lambda$  es la esfera sólida con centro en el origen y radio 1 y  $m, n, p$  son números enteros no negativos.
12. Calcule la integral de Dirichlet  $\int_{\Lambda} x^p y^q z^r (1 - x - y - z)^s dV$  con  $p, q, r, s$  números positivos si  $\Lambda$  es el sólido limitado por las superficies  $x + y + z = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  y  $z = 0$ . Sugerencia: parametrize  $\Lambda$  mediante la función vectorial  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta)$  definida implícitamente por  $x + y + z = \xi$ ,  $y + z = \xi\eta$ ,  $z = \xi\eta\zeta$ . Requiere determinar el dominio de  $\mathbf{r}$ .
13. Suponga que el plano  $z = \alpha$  intersecta la esfera sólida con centro en el origen y radio 1, determinando dos sólidos. Encuentre el valor de  $\alpha$  para el cual la razón entre los volúmenes de los dos sólidos es 3.
14. ¿En qué razón la superficie  $x^2 + y^2 + az = 4a^2$  divide el volumen de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4az$ ?
15. Sea  $\sigma_1$  la superficie de la esfera de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y  $\sigma_2$  la superficie de ecuación  $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$ . Determine el valor de la constante  $k$  para el cual la razón entre el área de la parte de  $\sigma_1$  dentro de  $\sigma_2$  y el área de la parte de  $\sigma_1$  exterior a  $\sigma_2$  sea  $2/5$ .
16. Calcule el área de cada una de las siguientes superficies:
  - (a) La parte de la superficie de la esfera con centro en el origen y radio  $a$  cuyos puntos satisfacen la desigualdad  $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ .
  - (b) La parte de la superficie cilíndrica de ecuación  $z = 4 - y^2$  cuyos puntos satisfacen la desigualdad  $x^2 + y^2 \leq 4$ .
  - (c) La parte del paraboloides de ecuación  $z = x^2 + y^2$  cuyos puntos satisfacen las desigualdades  $|x| \leq 1$  y  $|y| \leq 1$ .

# LECCIÓN 10

---

## Campos vectoriales

---

Los campos vectoriales son funciones que se usan frecuentemente para modelar fenómenos de asignación vectorial, como por ejemplo el campo de velocidades de un fluido, el campo eléctrico, el campo magnético y el campo gravitacional. Desde el punto de vista matemático un campo vectorial es una función definida en algún conjunto y que toma valores en un espacio vectorial. Se abordará en este texto el estudio de campos vectoriales bidimensionales y tridimensionales, cuyos dominios son subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ .

Un *campo vectorial bidimensional* es una función  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . En el caso en que  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , se tiene que

$$\mathbf{F}(x, y) = \langle p(x, y), q(x, y) \rangle; \quad (x, y) \in D,$$

donde  $p$  y  $q$  son funciones reales definidas en  $D$  que se denominan funciones componentes del campo  $\mathbf{F}$ .

Un *campo vectorial tridimensional* es una función  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ . En el caso en que  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  se tiene que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle p(x, y, z), q(x, y, z), r(x, y, z) \rangle; \quad (x, y, z) \in D.$$

donde  $p$ ,  $q$  y  $r$  son funciones reales definidas en  $D$  que se denominan funciones componentes del campo  $\mathbf{F}$ . El estudio de los campos vectoriales se hace de manera natural mediante el estudio de sus funciones componentes.

En el caso en que el dominio  $D$  de un campo vectorial no se dé explícitamente, se considerará como dominio la intersección de los dominios de sus funciones componentes. El rango es el conjunto de las imágenes de los puntos del dominio. La gráfica es el conjunto de todas las parejas formadas por cada elemento del dominio y su respectiva imagen.

La forma más usual para representar campos vectoriales cuyos dominio y rango están en el mismo espacio, consiste en escoger una colección de puntos  $U$  en el dominio de  $\mathbf{F}$  y dibujar los segmentos dirigidos con origen  $U$  que representan los vectores  $\mathbf{F}(U)$ . Estas representaciones dan información sobre el comportamiento del campo vectorial.

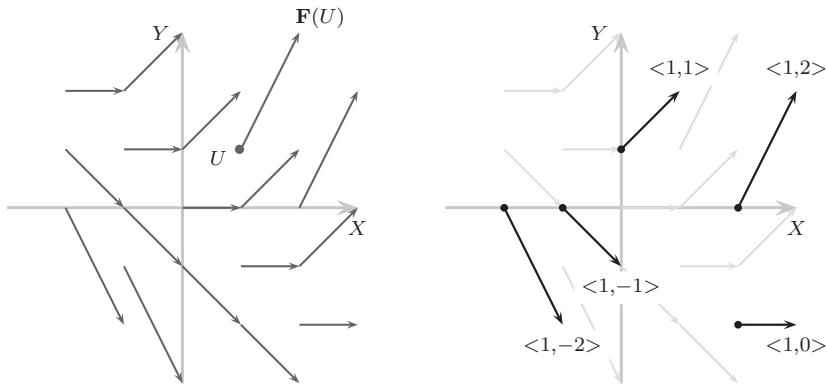


Figura 10.1: Valores del campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y) = \langle 1, x + y \rangle$  en algunos puntos de su dominio. A la derecha, se han destacado  $\mathbf{F}(0, 1)$ ,  $\mathbf{F}(2, 0)$ ,  $\mathbf{F}(2, -2)$ ,  $\mathbf{F}(-1, 0)$  y  $\mathbf{F}(-2, 0)$ .

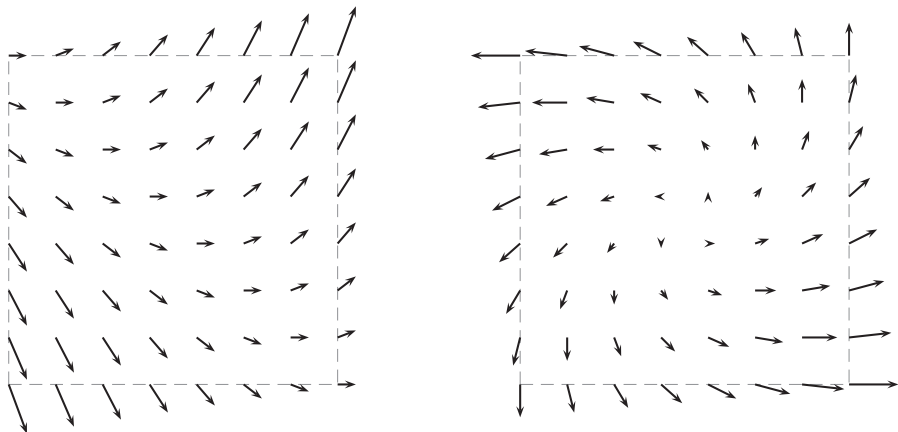


Figura 10.2: Representación de un mismo campo vectorial bidimensional en dos sectores diferentes de su dominio

El límite de un campo vectorial en un punto de su dominio existe si existen los límites de sus funciones componentes y las derivadas parciales de un campo vectorial existen si existen las derivadas parciales de sus funciones componentes, los cálculos se hacen componente a componente. Por último, un campo vectorial es continuo o diferenciable si sus funciones componentes lo son.

### La circulación y el flujo.

Los dos conceptos más importantes, desde el punto de vista físico, relacionados con campos vectoriales, son el flujo y la circulación, que se hacen evidentes al estudiar la interacción de los campos con curvas y superficies. Se estudiarán primero estos dos conceptos para campos vectoriales bidimensionales, estudiando su interacción con curvas contenidas en sus dominios.

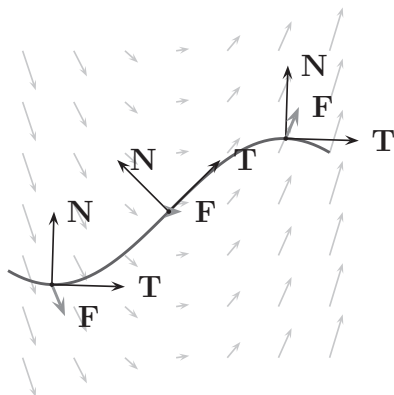


Figura 10.3: Una curva contenida en el dominio de un campo vectorial y los valores de  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{F}$  en tres puntos de la curva.

Dado un campo vectorial bidimensional  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido en un subconjunto  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  y una curva  $\Gamma$  en  $D$  parametrizada por una función vectorial  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . La *densidad de circulación*,  $\delta\mathbf{C}_{\Gamma}^{\mathbf{F}}(x(t), y(t))$ , del campo  $\mathbf{F}$  en el punto  $(x(t), y(t))$  de la curva  $\Gamma$  se define como la componente tangencial de  $\mathbf{F}(x(t), y(t))$ , esto es

$$\delta\mathbf{C}_{\Gamma}^{\mathbf{F}}(x(t), y(t)) = \mathbf{F}(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{T}(t),$$

donde  $\mathbf{T}(t)$  es el vector unitario tangente a la curva en el punto  $(x(t), y(t))$ . La *densidad de flujo* del campo  $\mathbf{F}$  en el punto  $(x(t), y(t))$  de la curva  $\Gamma$  se define como la componente normal de  $\mathbf{F}(x(t), y(t))$ , esto es

$$\delta\mathbf{F}_{\Gamma}^{\mathbf{F}}(x(t), y(t)) = \mathbf{F}(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{N}(t),$$

donde  $\mathbf{N}(t)$  es el vector unitario normal a la curva en el punto  $(x(t), y(t))$ , que se obtiene al girar  $\mathbf{T}(t)$  90 grados en sentido positivo. Obsérvese que las densidades de circulación  $\delta\mathbf{C}_\Gamma^{\mathbf{F}}$  y de flujo  $\delta\mathbf{F}_\Gamma^{\mathbf{F}}$  de un campo son funciones escalares con dominio  $\Gamma$ , la curva parametrizada por la función vectorial  $\mathbf{r}$ . Por ser  $\mathbf{N}$  el vector que se obtiene al rotar  $\mathbf{T}$  90 grados en sentido positivo, se tiene que,

$$\mathbf{N} = \left\langle -\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right\rangle$$

porque

$$\mathbf{T} = \left\langle \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right\rangle.$$

Así como al integrar la densidad de masa se obtiene la masa, al integrar la densidad de circulación del campo sobre la curva se obtiene la *circulación del campo a lo largo de la curva* y al integrar la densidad de flujo del campo sobre la curva se obtiene el *flujo del campo a través de la curva*. Es decir, la circulación  $\mathbf{C}_\Gamma^{\mathbf{F}}$  de  $\mathbf{F}$  a lo largo de la curva  $\Gamma$  es la integral sobre  $\Gamma$  de  $\delta\mathbf{C}_\Gamma^{\mathbf{F}}$ , y ésta se puede escribir en términos de las componentes escalares de  $\mathbf{F}$  así:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_\Gamma^{\mathbf{F}} &= \int_\Gamma \delta\mathbf{C}_\Gamma^{\mathbf{F}} dL \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}(t) \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b (p(\mathbf{r}(t))x'(t) + q(\mathbf{r}(t))y'(t)) dt. \end{aligned}$$

Debido a la forma de la última integral, la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $\Gamma$  se suele escribir como  $\int_\Gamma p dx + q dy$  o como  $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$ .

El flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $\Gamma$ ,  $\mathbf{F}_\Gamma^{\mathbf{F}}$ , es la integral sobre  $\Gamma$  de  $\delta\mathbf{F}_\Gamma^{\mathbf{F}}$ , y se puede escribir

en términos de las componentes escalares de  $\mathbf{F}$  así:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_\Gamma^{\mathbf{F}} &= \int_\Gamma \delta \mathbf{F}_\Gamma^{\mathbf{F}} dL \\
 &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{N}(t) \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\
 &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \left\langle -\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right\rangle \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\
 &= \int_a^b \langle p(\mathbf{r}(t)), q(\mathbf{r}(t)) \rangle \cdot \langle -y'(t), x'(t) \rangle dt \\
 &= \int_a^b (q(\mathbf{r}(t))x'(t) - p(\mathbf{r}(t))y'(t)) dt.
 \end{aligned}$$

Debido a la forma de la última integral, el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $\Gamma$  se suele representar mediante la integral  $\int_\Gamma qdx - pdy$  o mediante la integral  $\int_\Gamma \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{L}$ , donde  $\tilde{\mathbf{F}} = \langle q, -p \rangle$  se conoce como el *campo dual* del campo  $\mathbf{F}$ . Se puede observar, a partir de la deducción anterior, que el flujo de un campo a través de una curva es igual a la circulación de su campo dual a lo largo de la misma curva. Como ilustración, dibuje el campo dual del campo representado en la figura 10.1 y observe la relación entre los dos.

### Densidad rotacional y densidad de expansión.

Los conceptos de densidad rotacional y de densidad de expansión de un campo vectorial <sup>1</sup>, son fundamentales para entender los conceptos de rotacional y divergencia de un campo vectorial y comprender los teoremas fundamentales: el Teorema de Stokes y el Teorema de la Divergencia. Estas densidades no son otra cosa que la *circulación y el flujo por unidad de área*, respectivamente, en cada uno de los puntos del dominio del campo vectorial.

Supóngase que las componentes escalares del campo,  $p$  y  $q$  del campo vectorial bidimensional  $\mathbf{F}(x, y) = \langle p(x, y), q(x, y) \rangle$ , tienen derivadas parciales continuas en una vecindad  $V$  de  $(0, 0)$ .

Sea  $\sigma$  un rectángulo de vértices  $V_1(\Delta x, \Delta y)$ ,  $V_2(-\Delta x, \Delta y)$ ,  $V_3(-\Delta x, -\Delta y)$  y

---

<sup>1</sup>Estas densidades se conocen también como microcirculación y microflujo del campo, respectivamente.

$V_4(\Delta x, -\Delta y)$ , contenido en  $V$  y cuyo borde  $\Gamma$  se considera orientado positivamente<sup>2</sup> (vea la figura 10.4). La circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo del lado  $V_1V_2$ , que escribiremos  $\mathbf{C}_{12}^{\mathbf{F}}$  es, aproximadamente, el producto de la densidad de circulación de  $\mathbf{F}$  en el punto medio de  $V_1V_2$  y la longitud de  $V_1V_2$ , es decir<sup>3</sup>  $\mathbf{C}_{12}^{\mathbf{F}} \approx \{\mathbf{F}(0, \Delta y) \cdot (-\mathbf{i})\}\{2\Delta x\}$ .

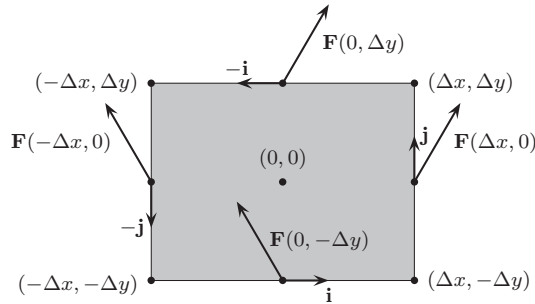


Figura 10.4: Este es el rectángulo *sigma*. Se representan los valores del campo  $\mathbf{F}$  en los puntos medios de los segmentos que componen a  $\Gamma$  y los vectores tangentes unitarios en los mismos puntos en el sentido correspondiente a la orientación de  $\Gamma$ .

La circulación del campo a lo largo de los demás lados se puede expresar de la misma forma, y así, se tiene que la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $\Gamma$  es:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_{\Gamma}^{\mathbf{F}} &= \mathbf{C}_{12}^{\mathbf{F}} + \mathbf{C}_{23}^{\mathbf{F}} + \mathbf{C}_{34}^{\mathbf{F}} + \mathbf{C}_{41}^{\mathbf{F}} \\
 &\approx \{\mathbf{F}(0, \Delta y) \cdot (-\mathbf{i})\}\{2\Delta x\} + \{\mathbf{F}(-\Delta x, 0) \cdot (-\mathbf{j})\}\{2\Delta y\} \\
 &\quad + \{\mathbf{F}(0, -\Delta y) \cdot \mathbf{i}\}\{2\Delta x\} + \{\mathbf{F}(\Delta x, 0) \cdot \mathbf{j}\}\{2\Delta y\} \\
 &= 2\Delta y\{q(\Delta x, 0) - q(-\Delta x, 0)\} - 2\Delta x\{p(0, \Delta y) - p(0, -\Delta y)\} \\
 &= 4\Delta x\Delta yq_x(\alpha, 0) - 4\Delta x\Delta yp_y(0, \beta) \\
 &= 4\Delta x\Delta y\{q_x(\alpha, 0) - p_y(0, \beta)\},
 \end{aligned}$$

<sup>2</sup>En el sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj

<sup>3</sup>No es descabellado suponer que la densidad de circulación es acotada y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{C}_{12}^{\mathbf{F}} - \delta\mathbf{C}_{12}^{\mathbf{F}}(0, \Delta y) \cdot 2\Delta x| &= \left| \int_{V_1V_2} \delta\mathbf{C}_{12}^{\mathbf{F}} dL - \delta\mathbf{C}_{12}^{\mathbf{F}}(0, \Delta y) \int_{V_1V_2} dL \right| \\
 &= \left| \int_{V_1V_2} (\delta\mathbf{C}_{12}^{\mathbf{F}} - \delta\mathbf{C}_{12}^{\mathbf{F}}(0, \Delta y)) dL \right| \\
 &\leq K\Delta x.
 \end{aligned}$$

donde  $\alpha \in (-\Delta x, \Delta x)$  y  $\beta \in (-\Delta y, \Delta y)$ . En el penúltimo paso se usó del Teorema del Valor medio para derivadas. Tomando el límite cuando  $\Delta x$  y  $\Delta y$  tienden a cero, y teniendo en cuenta que las derivadas parciales de  $p$  y  $q$  son continuas en  $(0, 0)$ , obtenemos la *densidad rotacional* de  $\mathbf{F}$  en  $(0, 0)$ ,  $\delta\mathbf{R}^{\mathbf{F}}(0, 0)$ , que es la circulación por unidad de área de  $\mathbf{F}$  en  $(0, 0)$ :

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{R}^{\mathbf{F}}(0, 0) &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\text{Circulación de } \mathbf{F} \text{ a lo largo de } \Gamma}{\text{área de } \sigma} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{4\Delta x \Delta y \{q_x(\alpha, 0) - p_y(0, \beta)\}}{4\Delta x \Delta y} \\ &= q_x(0, 0) - p_y(0, 0)\end{aligned}$$

Se considera ahora la densidad de expansión de  $\mathbf{F}$  en el punto  $(0, 0)$ , con las mismas suposiciones hechas anteriormente. El flujo de  $\mathbf{F}$  a través del borde  $\Gamma$  del rectángulo  $\sigma$  de vértices  $V_1(\Delta x, \Delta y)$ ,  $V_2(-\Delta x, \Delta y)$ ,  $V_3(-\Delta x, -\Delta y)$  y  $V_4(\Delta x, -\Delta y)$ , orientado negativamente (vea la figura 10.5), se calcula como sigue.

El flujo de  $\mathbf{F}$  a través del lado  $V_1V_2$ , que escribiremos  $\mathbf{F}_{12}^{\mathbf{F}}$  es, aproximadamente, el producto de la densidad de flujo  $\mathbf{F}$  en el punto medio de  $V_1V_2$  y la longitud de  $V_1V_2$ , es decir  $\mathbf{F}_{12}^{\mathbf{F}} \approx \{\mathbf{F}(0, \Delta y) \cdot \mathbf{j}\}\{2\Delta x\}$  (vea la nota de pie de página 3). El flujo del campo a través de los demás lados se puede expresar de la misma forma, y así, se tiene que el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $\Gamma$ ,  $\mathcal{F}_{\Gamma}^{\mathbf{F}}$  es:

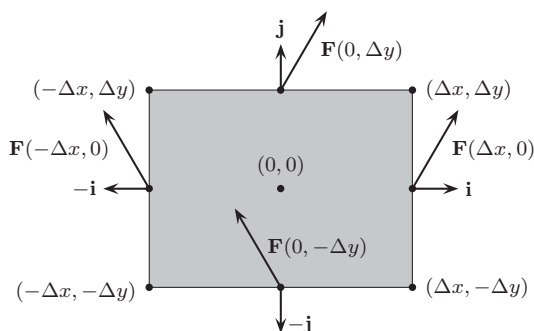


Figura 10.5: Se representan los valores del campo  $\mathbf{F}$  en los puntos medios de los segmentos que componen a  $\Gamma$  y los vectores normales unitarios en los mismos puntos que corresponden a la orientación negativa de  $\Gamma$ , es decir, apuntan hacia afuera de  $\sigma$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\Gamma}^{\mathbf{F}} &= \mathbf{F}_{12}^{\mathbf{F}} + \mathbf{F}_{23}^{\mathbf{F}} + \mathbf{F}_{34}^{\mathbf{F}} + \mathbf{F}_{41}^{\mathbf{F}} \\ &\approx \{\mathbf{F}(0, \Delta y) \cdot \mathbf{j}\}\{2\Delta x\} + \{\mathbf{F}(-\Delta x, 0) \cdot (-\mathbf{i})\}\{2\Delta y\} \\ &\quad + \{\mathbf{F}(0, -\Delta y) \cdot (-\mathbf{j})\}\{2\Delta x\} + \{\mathbf{F}(\Delta x, 0) \cdot \mathbf{i}\}\{2\Delta y\}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= 2\Delta y\{p(\Delta x, 0) - p(-\Delta x, 0)\} + 2\Delta x\{q(0, \Delta y) - q(0, -\Delta y)\} \\
&= 4\Delta x\Delta y p_x(\alpha, 0) + 4\Delta x\Delta y q_y(0, \beta) \\
&= 4\Delta x\Delta y\{p_x(\alpha, 0) + q_y(0, \beta)\},
\end{aligned}$$

donde  $\alpha \in (-\Delta x, \Delta x)$  y  $\beta \in (-\Delta y, \Delta y)$ . En el penúltimo paso se hizo uso del Teorema del Valor medio para derivadas. Calculando el límite cuando  $\Delta x$  y  $\Delta y$  tienden a cero y teniendo en cuenta que las derivadas parciales de  $p$  y  $q$  son continuas en  $(0, 0)$ , obtenemos *la densidad de expansión* de  $\mathbf{F}$  en  $(0, 0)$ ,  $\delta\mathbf{E}^{\mathbf{F}}(0, 0)$ , que es el flujo por unidad de área de  $\mathbf{F}$  en  $(0, 0)$ :

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{E}^{\mathbf{F}}(0, 0) &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\text{Flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } \Gamma}{\text{área de } \sigma} \\
&= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{4\Delta x\Delta y\{p_x(\alpha, 0) + q_y(0, \beta)\}}{4\Delta x\Delta y} \\
&= p_x(0, 0) + q_y(0, 0)
\end{aligned}$$

Las densidades rotacional y de expansión se pueden calcular en todos los puntos del dominio del campo  $\mathbf{F}$  de la misma forma en que se calculó en el punto  $(0, 0)$ , para encontrar que la densidad rotacional de  $\mathbf{F}$  en  $(x, y)$ ,  $\delta\mathbf{R}^{\mathbf{F}}(x, y)$  y la densidad de expansión de  $\mathbf{F}$  en  $(x, y)$ ,  $\delta\mathbf{E}^{\mathbf{F}}(x, y)$ , están dadas por:

$$\delta\mathbf{R}^{\mathbf{F}}(x, y) = q_x(x, y) - p_y(x, y), \quad \text{y} \quad \delta\mathbf{E}^{\mathbf{F}}(x, y) = p_x(x, y) + q_y(x, y).$$

Es de anotar que el concepto de circulación a lo largo de una curva se puede extender de forma natural a campos vectoriales tridimensionales, pero el concepto de flujo a través de una curva no (¿por qué?). En la siguiente lección se discutirán los conceptos de flujo, densidad de expansión y densidad de rotación de campos vectoriales tridimensionales.

### Los campos gradiente

Un ejemplo de campo vectorial es el campo gradiente de una función. El argumento que se presenta a continuación es válido para funciones de dos o de tres variables, y demuestra que la circulación de un *campo gradiente* de una función  $f$  depende exclusivamente de los valores de  $f$  en los puntos inicial y final de la curva. Sean  $f$  una función diferenciable de varias variables con dominio  $D$  y  $\Gamma$  una curva contenida en  $D$  y parametrizada por una función

vectorial diferenciable  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow D$ . La circulación del campo vectorial  $\nabla f$  a lo largo de  $\Gamma$  es:

$$\begin{aligned} C_{\Gamma}^{\nabla f} &= \int_{\Gamma} \nabla f \cdot d\mathbf{L} \\ &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t) dt \\ &= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) \end{aligned}$$

Este resultado significa que si  $\mathbf{F}$  es un campo gradiente, la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de cualquier curva dentro del dominio sólo depende de los puntos inicial y final de la curva. Recíprocamente, si la circulación de un campo  $\mathbf{F}$  a lo largo de cualquier curva dentro del dominio sólo depende de los puntos inicial y final de la curva, entonces el campo vectorial es un campo gradiente. En efecto, debido a la suposición hecha, está bien definida la función  $f(x, y, z) = \int_{[(a,b,c),(x,y,z)]} \delta C_{\Gamma}^{\mathbf{F}} dl$ , donde la integral se calcula sobre cualquier curva que parta del punto  $(a, b, c)$  y termine en el punto  $(x, y, z)$ , y se puede demostrar que  $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$  (ejercicio). Los campos vectoriales  $\mathbf{F}$  para los que existe una función  $f$ , con el mismo dominio de  $\mathbf{F}$ , tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$ , se llaman *campos conservativos* y, en este caso, a la función  $f$  se le llama *función potencial* de  $\mathbf{F}$ .

Para campos vectoriales tridimensionales existen varios criterios para decidir si un campo vectorial es conservativo. Si  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial definido en  $\mathbb{R}_3$ , cuyas componentes tienen primeras derivadas parciales continuas, excepto posiblemente en un número finito de puntos, las siguientes afirmaciones son equivalentes,

1.  $\mathbf{F}$  es el gradiente de una función  $f$  definida en los puntos en los que las componentes de  $\mathbf{F}$  son diferenciables.
2.  $\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = 0$ , para cualquier curva cerrada simple  $\Gamma$  contenida en el dominio de  $\mathbf{F}$ .
3.  $\int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$ , para cualquier par de curvas simples  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  contenidas en el dominio de  $\mathbf{F}$ , que comparten el punto inicial y el punto final.

4.  $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}^4$ 

La demostración de la equivalencia de estas condiciones se puede encontrar en el libro de *Cálculo Vectorial* de Marsden y Tromba, Addison Wesley, 2004[1], quinta edición. Sin embargo, si  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial bidimensional, estas condiciones no son todas equivalentes. El contraejemplo es el campo vectorial  $\mathbf{F} = \left\langle \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right\rangle$  que está definido en  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  y sus componentes tienen derivadas parciales de todos los órdenes en todos los puntos de su dominio. Diga cuáles de las condiciones anteriores no son equivalentes (vea el ejercicio 17).

Es de anotar que si el campo  $\mathbf{F}$  es un campo de fuerzas y  $\Gamma$  es la trayectoria de un objeto que se desplaza bajo la influencia del campo de fuerzas, la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $\Gamma$  es el *trabajo* realizado por el campo  $\mathbf{F}$  cuando el objeto se desplaza a lo largo de  $\Gamma$  desde el punto inicial hasta el punto final.

**Superficies con borde y superficie de un sólido**

Hasta el momento se ha hecho uso del término *borde* de una superficie de manera informal. Aunque la definición general de borde está fuera del alcance de este texto, en esta sección se precisará este concepto para las superficies especiales definidas en la Lección 3 (vea (3,4)).

El borde  $\partial\mathcal{R}$ , de una 2-celda  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$  con vértices  $P_0(a, c)$ ,  $P_1(b, c)$ ,  $P_2(b, d)$  y  $P_3(a, d)$  es la unión de los segmentos dirigidos  $P_0P_1$ ,  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$ , y  $P_3P_0$ :

$$\partial\mathcal{R} = P_0P_1 \cup P_1P_2 \cup P_2P_3 \cup P_3P_0.$$

Una parametrización de  $\partial\mathcal{R}$ , en el caso en que  $a = c = 0$  y  $b = d = 1$ , es la función vectorial  $\mathbf{b}(t) : [0, 4] \rightarrow \partial\mathcal{R}$ , definida por

$$\mathbf{b}(t) = \begin{cases} \langle t, 0 \rangle & \text{si } t \in [0, 1] \\ \langle 1, t - 1 \rangle & \text{si } t \in [1, 2] \\ \langle 3 - t, 1 \rangle & \text{si } t \in [2, 3] \\ \langle 0, 4 - t \rangle & \text{si } t \in [3, 4] \end{cases}$$

Usando esta parametrización se pueden ahora clasificar las superficies entre las que tienen borde, y las que son cerradas. Para ésto, considérese una superficie

---

<sup>4</sup>Esta condición significa que la densidad rotacional del campo en cualquier superficie contenida en su dominio es nula. En la siguiente lección estudiaremos el significado de este campo vectorial.

$\sigma$  (en  $\mathbb{R}^2$  o en  $\mathbb{R}^3$ ) parametrizada por una función vectorial  $\mathbf{r} : \mathcal{R} \rightarrow \sigma$ . La función vectorial  $\mathbf{r} \circ \mathbf{b}$  parametriza una curva  $\Gamma$  contenida en  $\sigma$ . Se dice que  $\sigma$  es una *superficie cerrada* si para todo campo vectorial  $\mathbf{F}$  cuyo dominio contenga a  $\Gamma$  se tiene que

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

En caso contrario se dice que  $\sigma$  es una *superficie con borde*.

Los detalles de los cálculos expuestos a continuación se dejan como ejercicio.

Todos los discos en el plano son superficies con borde. Se ilustra este hecho mostrando que el disco  $\sigma$  de radio 1 y centro en el origen tiene borde. Recuérdate que  $\mathbf{r} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \sigma$  definida por

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle u \cos(2\pi v), u \sin(2\pi v) \rangle$$

es una parametrización de  $\sigma$ . Entonces, componiendo  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{r}$  se obtiene,

$$(\mathbf{r} \circ \mathbf{b})(t) = \begin{cases} \langle t, 0 \rangle & \text{si } t \in [0, 1], \\ \langle \cos(2\pi(t-1)), \sin(2\pi(t-1)) \rangle & \text{si } t \in [1, 2], \\ \langle 3-t, 0 \rangle & \text{si } t \in [2, 3], \\ \langle 0, 0 \rangle & \text{si } t \in [3, 4]. \end{cases}$$

Ahora, considérese el campo vectorial  $\mathbf{F}$  definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = \langle -yh(x^2 + y^2), xh(x^2 + y^2) \rangle,$$

donde  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \in [0, 1/3], \\ \frac{3r-1}{r^2} & \text{si } r \in [1/3, 2/3], \\ \frac{1}{r^2} & \text{si } r \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{F} \circ (\mathbf{r} \circ \mathbf{b})(t) = \begin{cases} \langle 0, th(t^2) \rangle & \text{si } t \in [0, 1], \\ \langle -\sin(2\pi(t-1))h(1), \cos(2\pi(t-1))h(1) \rangle & \text{si } t \in [1, 2], \\ \langle 0, (3-t)h((3-t)^2) \rangle & \text{si } t \in [2, 3], \\ \langle 0, 0 \rangle & \text{si } t \in [3, 4]. \end{cases}$$

De aquí que

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = \int_1^2 2\pi dt = 2\pi \neq 0$$

Por otro lado, todas las superficies de esferas en  $\mathbb{R}^3$  son superficies sin borde, es decir, son cerradas. Se ilustra este hecho mostrando que la superficie  $\sigma$  de la esfera de radio 1 con centro en el origen es una superficie cerrada. Recuérdese que  $\mathbf{r} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \sigma$  definida por

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle \cos(2\pi u)\text{sen}(\pi v), \text{sen}(2\pi u)\text{sen}(\pi v), \cos(\pi v) \rangle$$

es una parametrización de  $\sigma$ . Componiendo  $\mathbf{b}$  con  $\mathbf{r}$  se obtiene

$$(\mathbf{r} \circ \mathbf{b})(t) = \begin{cases} \langle 0, 0, 1 \rangle & \text{si } t \in [0, 1], \\ \langle \text{sen}(\pi(t-1)), 0, \cos(\pi(t-1)) \rangle & \text{si } t \in [1, 2], \\ \langle 0, 0, -1 \rangle & \text{si } t \in [2, 3], \\ \langle \text{sen}(\pi(4-t)), 0, \cos(\pi(4-t)) \rangle & \text{si } t \in [3, 4]. \end{cases}$$

Por consiguiente, para cualquier campo vectorial  $\mathbf{F} = \langle p, q, r \rangle$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} &= \pi \int_1^2 (p \cos(\pi(t-1)) - r \text{sen}(\pi(t-1))) dt \\ &\quad - \pi \int_3^4 (p \cos(\pi(4-t)) - r \text{sen}(\pi(4-t))) dt \\ &= \pi \int_0^1 (p \cos(\pi u) - r \text{sen}(\pi u)) dt \\ &\quad + \pi \int_1^0 (p \cos(\pi u) - r \text{sen}(\pi u)) dt \\ &= 0, \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.

El *borde* de una superficie con borde  $\sigma$ , es la curva  $\partial\sigma$  parametrizada por  $\mathbf{r} \circ \mathbf{b}$ .

Con un procedimiento similar, aunque un poco más elaborado, se puede definir la superficie  $\partial\mathcal{P}$  de una 3-celda <sup>5</sup> y calcular una parametrización  $\mathbf{s}$  de la misma (Véase el ejercicio 23 de la lección 3). Supóngase que el sólido  $\Lambda$  está parametrizado por una función vectorial  $\mathbf{r} : \mathcal{P} \rightarrow \Lambda$ . Entonces, la función vectorial  $\mathbf{r} \circ \mathbf{s}$  parametriza la superficie  $\partial\Lambda$  del sólido  $\Lambda$ .

Se deja como ejercicio, al lector interesado, demostrar que las superficies de sólidos son todas superficies cerradas.

---

<sup>5</sup>En realidad, en los libros de topología el término que se utiliza es el de borde de la 3-celda

## EJERCICIOS

1. Suponga que  $(0, 0, 0)$  es un punto interior del dominio del campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = p(x, y, z)\mathbf{i} + q(x, y, z)\mathbf{j} + r(x, y, z)\mathbf{k}$  y que las funciones  $p$ ,  $q$  y  $r$  tienen derivadas parciales de primer orden, continuas en  $(0, 0, 0)$ . Calcule la densidad de expansión de  $\mathbf{F}$  en  $(0, 0, 0)$ . Ayuda: imite el cálculo de la densidad de expansión de un campo bidimensional considerando una 3-celda conveniente con centro en  $(0, 0, 0)$ .
2. Muestre que si para cualquier curva  $\Gamma$  contenida en el dominio de  $\mathbf{F}$ ,  $\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$  depende únicamente de los puntos inicial y final de  $\Gamma$ , entonces  $\mathbf{F} = \nabla f$  para alguna función escalar  $f$  con el mismo dominio de  $\mathbf{F}$ .
3. Sea  $\Gamma$  una curva parametrizada por una función vectorial diferenciable  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\mathbf{F}$  un campo vectorial continuo definido sobre  $\Gamma$ .
  - (a) Si  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$  es perpendicular a  $\mathbf{r}'(t)$ , para todo  $t \in [a, b]$ , muestre que  $\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = 0$ .
  - (b) Si  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$  es paralelo a  $\mathbf{r}'(t)$ , para todo  $t \in [a, b]$ , muestre que  $\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = \pm \int_{\Gamma} \|\mathbf{F}\| dL$ .
4. Si la curva  $\Gamma$  está parametrizada por  $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t \mathbf{i} + \sin^3 t \mathbf{j}$ , con  $0 \leq t \leq 2\pi$ , y  $\mathbf{F} = y^{1/3} \mathbf{i} + x^{1/3} \mathbf{j}$  calcule la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $\Gamma$  y el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $\Gamma$ .
5. Calcule la circulación de  $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^3 + 2xy)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$  a lo largo del borde  $\Gamma$  de la cara superior del cubo de vértices  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ .
6. Si  $\nabla f(x, y, z) = 2xyz e^{x^2} \mathbf{i} + z e^{x^2} \mathbf{j} + y e^{x^2} \mathbf{k}$  y  $f(0, 0, 0) = 5$ , calcule  $f(1, 1, 2)$ .
7. Calcule  $\int_{\Gamma} f dL$  para la función  $f$  y la curva  $\Gamma$  dadas:
  - (a)  $f(x, y) = xy$ ;  $\Gamma: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi/2$
  - (b)  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + 1}$ ;  $\Gamma: x = t, y = 0, 0 \leq t \leq 1$
  - (c)  $f(x, y) = 2x + y$ ;  $\Gamma$ : curva poligonal desde  $(0, 0)$  hasta  $(3, 2)$  pasando por  $(3, 0)$ .
  - (d)  $f(x, y) = x + y^2$ ;  $\Gamma$  es  $\Gamma_1$  seguida de  $\Gamma_2$ , donde  $\Gamma_1$  es el arco de la circunferencia de ecuación  $x^2 + y^2 = 4$  desde  $(2, 0)$  hasta  $(-2, 0)$  en el sentido antihorario y  $\Gamma_2$  es el segmento de recta que empieza en  $(-2, 0)$  y termina en  $(2, 0)$ .

8. Para cada uno de los siguientes campos vectoriales  $\mathbf{F}$  y curvas  $\Gamma$  contenidas en sus dominios, haga una representación gráfica de  $\Gamma$  y de algunos de los valores de  $\mathbf{F}$  en puntos de la curva, y calcule  $\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$ .
- (a)  $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ ;  $\Gamma : x = 3t, y = 2t, 0 \leq t \leq 1$
- (b)  $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ ;  $\Gamma : x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$
- (c)  $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ;  $\Gamma : x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$
- (d)  $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y)\mathbf{i} + (x - y^2)\mathbf{j}$ ;  $\Gamma : x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$
- (e)  $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + xy^3\mathbf{j}$ ;  $\Gamma$  : la curva poligonal cerrada que empieza en  $(0, 0)$  y pasa por  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$ .
- (f)  $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i}$ ;  $\Gamma : x = 2 + \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$
9. Al parametrizar una curva  $\Gamma$  mediante una función vectorial  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  la curva queda orientada pues se piensa recorrida desde el punto señalado por  $\mathbf{r}(a)$  (punto inicial) hasta el punto señalado por  $\mathbf{r}(b)$  (punto final) a medida que  $t$  recorre la 1-celda  $[a, b]$  desde  $a$  hasta  $b$ . Al reparametrizar la curva mediante otra función vectorial que recorra la curva desde el punto final hasta el punto inicial, se está cambiando la orientación de la curva. Si  $\Gamma$  es una curva parametrizada,  $-\Gamma$  es la misma curva reparametrizada con orientación opuesta.
- (a) Si  $\Gamma$  está parametrizada por  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , reparametrízela para cambiar su orientación.
- (b) Demuestre que  $\int_{\Gamma} f(x, y) dL = \int_{-\Gamma} f(x, y) dL$ .
10. Sea  $\Gamma$  una curva cuya longitud de arco es  $\lambda$ . Muestre que  $\int_{\Gamma} 1 dL = \lambda$ .
11. Sea  $\Gamma$  una curva suave con longitud de arco  $\lambda$ , y suponga que  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$  es un campo vectorial tal que  $\|\mathbf{F}(x, y)\| \leq M$  para todo  $(x, y)$  en  $\Gamma$ . Muestre que  $|\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}| \leq M\lambda$ .
12. Calcule  $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$  si las ecuaciones paramétricas de  $\Gamma$  son  $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .
13. Calcule  $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$  si las ecuaciones paramétricas de  $\Gamma$  son  $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi$ .
14. En cada uno de los numerales determine si el campo  $\mathbf{F}$  tiene una función potencial y si la tiene determínela

- (a)  $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ .  
 (b)  $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ .  
 (c)  $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + x^3y\mathbf{j}$ .  
 (d)  $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$   
 (e)  $\mathbf{F}(x, y, z) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$  ( $a, b, c$  constantes)  
 (f)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$   
 (g)  $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} - (x - yz^2)\mathbf{j} + y^2z\mathbf{k}$

15. Sean  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$  campos vectoriales, sean  $a$  y  $b$  constantes, y sea  $\Gamma$  una curva en  $\mathbb{R}^2$ . Muestre que

$$\int_{\Gamma} (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) \cdot d\mathbf{L} = a \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} + b \int_{\Gamma} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{L}.$$

16. Sean  $f$  y  $g$  funciones de valor real continuamente diferenciables en un conjunto abierto  $D$ . Muestre que

$$\int_{\Gamma} f \nabla g \cdot d\mathbf{L} = - \int_{\Gamma} g \nabla f \cdot d\mathbf{L}$$

para cualquier curva cerrada  $\Gamma$  contenida en  $D$ .

17. Suponga que  $\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$  para todo  $(x, y) \neq (0, 0)$  es un campo de fuerzas, y sean  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , ecuaciones paramétricas de  $\Gamma$ .

- (a) Calcule el trabajo realizado por el campo al desplazar un objeto sobre la curva  $\Gamma$  desde el punto  $(1, 0)$  hasta el punto  $(0, 1)$  en sentido positivo.  
 (b) Calcule el trabajo realizado por el campo al desplazar un objeto sobre la curva  $\Gamma$  desde el punto  $(1, 0)$  hasta el punto  $(0, 1)$  en sentido negativo.  
 (c) Calcule el trabajo realizado por el campo al desplazar un objeto sobre la curva  $\Gamma$  una vuelta completa desde algún punto de la misma.  
 (d) Calcule el trabajo realizado por el campo al desplazar un objeto sobre la curva  $\Gamma$  una vuelta completa y media desde algún punto.



(e) Sea  $f(x, y) = \arctan(y/x)$ . Calcule el gradiente de  $f$  y discuta la relación que éste tiene con el campo vectorial  $\mathbf{F}$ .

Para profundizar más sobre este tema recomendamos la sección 3 del capítulo VII del libro *Calculus of Several Variables* de Serge Lang, en *Undergraduate Texts in Mathematics* de Springer, 1996[4].

18. Sean  $g$  y  $h$  funciones diferenciables de una sola variable con derivadas continuas, y sea  $\mathbf{F}(x, y) = h(y)\mathbf{i} + g(x)\mathbf{j}$ . Si  $\mathbf{F}$  tiene un potencial  $f$ , determínelo.
19. Dado el campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y) = (2x\sin y + x^3)\mathbf{i} + (x^2 \cos y + \tan y)\mathbf{j}$ , dé tres curvas que tengan como punto inicial el punto  $A(2, 0)$  y como punto final el punto  $B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ , y calcule la circulación del campo sobre cada una de las curvas. ¿Qué puede afirmar acerca de la circulación de este campo sobre cualquier curva que tenga como punto inicial  $A$  y como punto final  $B$ ?
20. Dado el campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y) = p(x, y)\mathbf{i} + q(x, y)\mathbf{j}$  ¿Qué condiciones deben satisfacer las funciones  $p$  y  $q$  para que el campo sea un campo gradiente y cómo se puede saber si lo es?
21. Provea los detalles de los cálculos en la sección sobre superficies con borde y superficies cerradas. ¿Por qué es necesario introducir la función  $h$  en la demostración de que los discos son superficies con borde?
22. Dé tres ejemplos de superficies con borde en  $\mathbb{R}^3$  y tres ejemplos de superficies cerradas y demuestre que lo son.
23. Determine, usando la definición de superficie de un sólido, la superficie de tres sólidos.
24. Demuestre que la superficie de un sólido es una superficie cerrada.

# LECCIÓN 11

---

## Divergencia y rotacional

---

En esta sección se presentará la generalización de los conceptos de densidad de expansión y densidad rotacional a campos vectoriales tridimensionales y se enuncian los Teoremas de la Divergencia y del Rotacional.

### Densidad de expansión para campos tridimensionales

Así como la densidad de expansión para un campo vectorial bidimensional es el flujo del campo por unidad de área, la densidad de expansión de un campo tridimensional es el flujo del campo por unidad de volumen. Para hacer esta generalización debemos precisar el concepto de flujo de un campo a través de una superficie:

Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = p(x, y, z)\mathbf{i} + q(x, y, z)\mathbf{j} + r(x, y, z)\mathbf{k}$  un campo vectorial tridimensional y  $\sigma$  una superficie contenida en el dominio del campo. Supongamos que  $\sigma$  es una *superficie orientable*, esto es, se puede parametrizar por una función vectorial  $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$ , con  $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ ,  $\mathbf{r}_u$ ,  $\mathbf{r}_v$  continuas y  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$  para todo  $(u, v)$ . Bajo estas condiciones, en cada punto de  $\sigma$  se puede considerar el vector normal unitario  $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$  y definir la *densidad de flujo*  $\delta\mathbf{F}_\sigma^{\mathbf{F}}$  de  $\mathbf{F}$  en cada punto de  $\sigma$ , como la componente normal de  $\mathbf{F}$ , esto es  $\delta\mathbf{F}_\sigma^{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ . Así, *el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de la superficie  $\sigma$* ,  $\mathbf{F}_\sigma^{\mathbf{F}}$ , es la integral de  $\delta\mathbf{F}_\sigma^{\mathbf{F}}$  sobre la superficie:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_\sigma^{\mathbf{F}} &= \int_\sigma \delta\mathbf{F}_\sigma^{\mathbf{F}} dA \\
&= \int_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dA \\
&= \int_a^b \int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dv du \\
&= \int_a^b \int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dv du.
\end{aligned}$$

Con el concepto de flujo de un campo a través de una superficie se puede generalizar el concepto de densidad de expansión de un campo tridimensional en los puntos de su dominio. Suponga que  $(0, 0, 0)$  pertenece al dominio del campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = p(x, y, z)\mathbf{i} + q(x, y, z)\mathbf{j} + r(x, y, z)\mathbf{k}$  y que las componentes del campo tienen derivadas parciales continuas en una vecindad de  $(0, 0, 0)$ . Considere la 3-celda  $[-\Delta x, \Delta x] \times [-\Delta y, \Delta y] \times [-\Delta z, \Delta z]$ , que está centrada en  $(0, 0, 0)$ , con  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$  lo suficientemente pequeños para que la 3-celda esté contenida en el dominio del campo. Procediendo de manera similar a como se hizo en la lección anterior, se puede hacer una aproximación del flujo del campo  $\mathbf{F}$  a través de la superficie de la 3-celda, dividir esta cantidad por el volumen de la 3-celda y hacer tender las longitudes de las aristas a cero. Se obtiene así la *densidad de expansión*  $\delta\mathbf{E}^{\mathbf{F}}$  del campo  $\mathbf{F}$  en el punto  $(0, 0, 0)$ :

$$\delta\mathbf{E}^{\mathbf{F}}(0, 0, 0) = p_x(0, 0, 0) + q_y(0, 0, 0) + r_z(0, 0, 0).$$

Al hacer estos mismos cálculos para cualquier punto  $(x, y, z)$  del dominio de  $\mathbf{F}$  se obtiene que  $\delta\mathbf{E}^{\mathbf{F}}(x, y, z) = p_x(x, y, z) + q_y(x, y, z) + r_z(x, y, z)$ . Es frecuente en la literatura sobre el tema llamar a la densidad de expansión *divergencia del campo* y escribirlo como:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = p_x(x, y, z) + q_y(x, y, z) + r_z(x, y, z).$$

Así,

$$\delta\mathbf{E}^{\mathbf{F}}(x, y, z) = \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z)$$

## Densidad rotacional para campos tridimensionales

La circulación de un campo tiene sentido sólo a lo largo de curvas, debido a que para cada punto en una curva se puede determinar un único vector tangente unitario, mientras que si el punto se considera en una superficie, existen infinitos vectores unitarios tangentes a la superficie en el punto. Por lo

tanto, al igual que para campos bidimensionales, definimos la densidad rotacional de un campo tridimensional como la circulación por unidad de área. Sin embargo, note que si se tienen una curva y un punto en el espacio, existen muchas superficies que contienen el punto y tienen como borde la curva, por lo tanto, para precisar la curva y el área se determina la densidad de circulación referida a un plano que contenga al punto y haremos los cálculos de la misma manera que se hizo en el caso bidimensional.

Suponiendo que  $(0, 0, 0)$  pertenece al dominio del campo  $\mathbf{F} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$  y que el campo tiene derivadas parciales continuas en una vecindad de  $(0, 0, 0)$ . Tomando el plano de ecuación  $ax + by - z = 0$ , que se puede parametrizar con la función  $\mathbf{r}(x, y) = \langle x, y, ax + by \rangle$ , y el cuadrilátero de vértices  $V_1(\Delta x, \Delta y, a\Delta x + b\Delta y)$ ,  $V_2(-\Delta x, \Delta y, -a\Delta x + b\Delta y)$ ,  $V_3(-\Delta x, -\Delta y, -a\Delta x - b\Delta y)$  y  $V_4(\Delta x, -\Delta y, a\Delta x - b\Delta y)$ . Sea  $\Gamma$  la curva cerrada formada por los segmentos  $V_1V_2$ ,  $V_2V_3$ ,  $V_3V_4$  y  $V_4V_1$ , recorrida en el sentido descrito y  $\sigma$  la superficie del plano limitada por  $\Gamma$ .

Para calcular una aproximación de la circulación del campo  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $\Gamma$ , se procede de manera idéntica a como se hizo en el caso bidimensional. Obsérvese que la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo del segmento  $V_1V_2$ ,  $C_{12}^{\mathbf{F}}$ , es aproximadamente igual a la componente tangencial del campo en el punto medio del segmento,  $\mathbf{F}(0, \Delta y, b\Delta y) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\langle -1, 0, -a \rangle$  multiplicado por la longitud  $2\Delta x\sqrt{1+a^2}$ , del segmento.

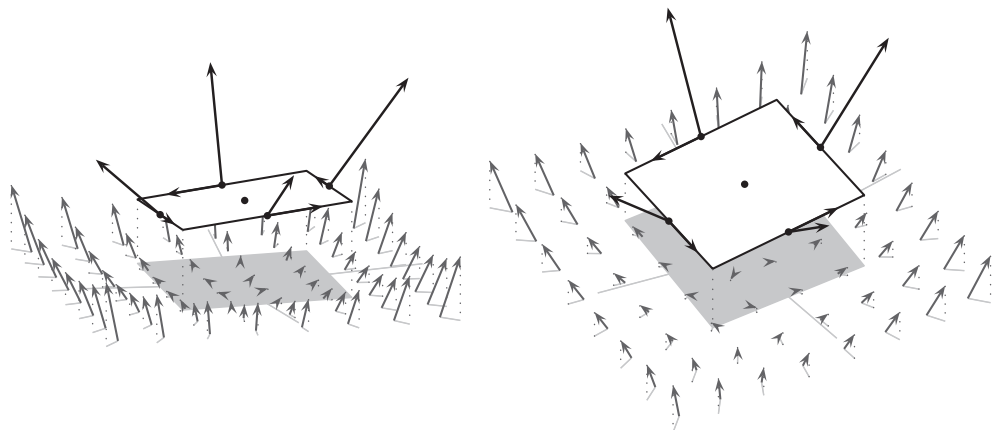


Figura 11.1: Representación del paralelogramo  $\sigma$  y del valor del campo en los puntos medios de los lados.

Se puede decir lo mismo acerca de  $C_{23}^{\mathbf{F}}$ ,  $C_{34}^{\mathbf{F}}$  y  $C_{41}^{\mathbf{F}}$ . Así,  $C_{\Gamma}^{\mathbf{F}}$ , la circulación de  $\mathbf{F}$

a lo largo de  $\Gamma$ ,  $\mathbf{C}_\Gamma^{\mathbf{F}}$ , es:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_\Gamma^{\mathbf{F}} &= \mathbf{C}_{12}^{\mathbf{F}} + \mathbf{C}_{23}^{\mathbf{F}} + \mathbf{C}_{34}^{\mathbf{F}} + \mathbf{C}_{41}^{\mathbf{F}} \\
 &\approx 2\Delta x\sqrt{1+a^2}\mathbf{F}(0, \Delta y, b\Delta y) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \langle -1, 0, -a \rangle \\
 &\quad + 2\Delta y\sqrt{1+b^2}\mathbf{F}(-\Delta x, 0, -a-\Delta x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \langle 0, -1, -b \rangle \\
 &\quad + 2\Delta x\sqrt{1+a^2}\mathbf{F}(0, -\Delta y, -b\Delta) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \langle 1, 0, a \rangle \\
 &\quad + 2\Delta y\sqrt{1+b^2}\mathbf{F}(\Delta x, 0, a\Delta x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \langle 0, 1, b \rangle.
 \end{aligned}$$

Efectuando los productos escalares y simplificando se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_\Gamma^{\mathbf{F}} &\approx 2\Delta x(-p(0, \Delta y, b\Delta y) - ar(0, \Delta y, b\Delta y)) \\
 &\quad + 2\Delta y(-q(-\Delta x, 0, -a\Delta x) - br(-\Delta x, 0, -a\Delta x)) \\
 &\quad + 2\Delta x(p(0, -\Delta y, -b\Delta y) + ar(0, -\Delta y, -b\Delta y)) \\
 &\quad + 2\Delta y(q(\Delta x, 0, a\Delta x) + br(\Delta x, 0, a\Delta x)).
 \end{aligned}$$

Agrupando por componentes escalares de  $\mathbf{F}$  se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_\Gamma^{\mathbf{F}} &\approx 2\Delta y(q(\Delta x, 0, a\Delta x) - q(-\Delta x, 0, -a\Delta x)) \\
 &\quad + 2\Delta x(p(0, -\Delta y, -b\Delta y) - p(0, \Delta y, b\Delta y)) \\
 &\quad + 2\Delta yb(r(\Delta x, 0, a\Delta x) - r(-\Delta x, 0, -a\Delta x)) \\
 &\quad + 2\Delta xa(r(0, -\Delta y, -b\Delta y) - r(0, \Delta y, b\Delta y)).
 \end{aligned}$$

Haciendo uso del Teorema del Valor medio para derivadas, existen  $\alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3 \in$

$(-\Delta x, \Delta x)$  y  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_4, \beta_4 \in (-\Delta y, \Delta y)$  tales que

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_\Gamma^{\mathbf{F}} &\approx 4\Delta x \Delta y (q_x(\alpha_2, 0, a\Delta x) + aq_z(-\Delta x, 0, \beta_2) \\ &\quad + br_x(\alpha_3, 0, a\Delta x) + abr_z(-\Delta x, 0, \beta_3)) \\ &\quad - 4\Delta x \Delta y (p_y(0, \alpha_1, b\Delta y) + bp_z(0, -\Delta y, \beta_1) \\ &\quad + ar_y(0, \alpha_4, b\Delta y) + abr_z(0, -\Delta y, \beta_4)). \end{aligned}$$

Como el área del paralelogramo es  $A(\sigma) = 4\Delta x \Delta y \sqrt{1 + a^2 + b^2}$ , y escribiendo  $n = \sqrt{1 + a^2 + b^2}$ , se tiene que la *densidad rotacional*  $\delta \mathbf{R}^{\mathbf{F}}(0, 0, 0)$  del campo  $\mathbf{F}$ , referida al plano dado, en el punto  $(0, 0, 0)$  es:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}^{\mathbf{F}}(0, 0, 0) &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\mathbf{C}_\Gamma^{\mathbf{F}}}{A(\sigma)} \\ &= \frac{1}{n} \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} (q_x(\alpha_2, 0, a\Delta x) + aq_z(-\Delta x, 0, \beta_2) \\ &\quad + br_x(\alpha_3, 0, a\Delta x) + abr_z(-\Delta x, 0, \beta_3) \\ &\quad - p_y(0, \alpha_1, b\Delta y) - bp_z(0, -\Delta y, \beta_1) \\ &\quad - ar_y(0, \alpha_4, b\Delta y) - abp_z(0, -\Delta y, \beta_4)) \\ &= \frac{1}{n} (a(q_z - r_y) + b(r_x - p_z) + (q_x - p_y)) \\ &= \frac{1}{n} \langle -a, -b, 1 \rangle \cdot \langle r_y - q_z, -(r_x - p_z), q_x - p_y \rangle, \end{aligned}$$

donde las últimas derivadas parciales están evaluadas en  $(0, 0, 0)$ . Procediendo de manera similar para cualquier punto  $(x, y, z)$  del dominio del campo  $\mathbf{F}$  obtenemos que la densidad rotacional del campo, en el punto, referida al plano de ecuación  $ax + by - z = 0$ , es:

$$\delta \mathbf{R}^{\mathbf{F}}(x, y, z) = \frac{\langle -a, -b, 1 \rangle}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \cdot \langle r_y - q_z, -(r_x - p_z), q_x - p_y \rangle |_{(x, y, z)}$$

Obsérvese que la densidad rotacional en un punto depende de dos vectores, el vector

$$\frac{\langle -a, -b, 1 \rangle}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},$$

que es un vector unitario normal al plano  $z = ax + by$  y el vector

$$\langle r_y - q_z, -(r_x - p_z), q_x - p_y \rangle,$$

que depende únicamente del campo. A este último vector se le denomina el *rotacional del campo*  $\mathbf{F}$  en el punto  $(x, y, z)$  y se nota como  $\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z)$ , esto es

$$\text{rot } \mathbf{F} = \langle r_y - q_z, -(r_x - p_z), q_x - p_y \rangle.$$

De ésta última observación se concluye que la densidad rotacional en un punto  $(x, y, z)$  de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  referida a un plano con vector normal unitario  $\mathbf{N}$  es

$$\delta \mathbf{R}^{\mathbf{F}}(x, y, z) = \text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{N}.$$

Para recordar las componentes del vector  $\text{rot } \mathbf{F}$  se usa la siguiente fórmula mnemotécnica

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

que debe leerse como el determinante del producto vectorial pero en el que

$$\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ p & q \end{vmatrix} = q_x - p_y, \quad \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_z \\ p & r \end{vmatrix} = r_x - p_z, \quad y \quad \begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ q & r \end{vmatrix} = r_y - q_z,$$

Se puede ahora calcular la densidad rotacional de un campo  $\mathbf{F}$  referida a una superficie orientable  $\sigma$ , calculando su densidad rotacional en cada punto de la superficie referida al plano tangente a la misma en el punto, es decir calculando la componente normal del rotacional de  $\mathbf{F}$ . Explícitamente si  $(x, y, z)$  es un punto de la superficie orientable  $\sigma$ , parametrizada por  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}(u, v) = \langle x, y, z \rangle$  se tiene que:

$$\delta \mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{F}}(x, y, z) = \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}.$$

### Teoremas fundamentales

Antes de enunciar los teoremas fundamentales, se hacen algunas aclaraciones sobre la notación. Primero que todo, recuérdese que para definir el concepto de integral múltiple sobre *curvas*, *superficies* y *sólidos*, se introdujo el concepto de parametrización mediante funciones vectoriales  $\mathbf{r}$  de una, dos y tres variables respectivamente. Para poder diferenciar la *dimensión* de la integral se introducen aquí los siguientes elementos de integración:

1. Elemento de **longitud** de arco:

$$d\mathbf{L} = \mathbf{r}'(t)dt \quad \text{y} \quad dL = \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

2. Elemento de **área** de superficie:

$$d\mathbf{A} = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)dudv \quad \text{y} \quad dA = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dudv$$

3. Elemento de **volumen** de sólido:

$$d\mathbf{V} = \mathbf{r}_u \cdot (\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w)dudv dw \quad \text{y} \quad dV = |\mathbf{r}_u \cdot (\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w)| dudv dw$$

Con esta terminología se puede escribir:

1. Si  $\Gamma$  es una curva parametrizada por la función vectorial derivable  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

y

$$\int_{\Gamma} f dL = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

2. Si  $\sigma$  es una superficie parametrizada por la función vectorial diferenciable  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ,  $a \leq u \leq b$ ,  $c \leq v \leq d$

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_a^b \int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dv du$$

y

$$\int_{\sigma} f dA = \int_a^b \int_c^d f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dv du.$$

3. Si  $\Lambda$  es un sólido parametrizado por la función vectorial diferenciable  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w)$ ,  $a \leq u \leq b$ ,  $c \leq v \leq d$ ,  $e \leq w \leq h$

$$\int_{\Lambda} f dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^h f(\mathbf{r}(u, v, w)) |\mathbf{r}_u \cdot (\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w)| dw dv du.$$



Usando esta notación se escribe la *rotación total*,  $\mathbf{R}_\sigma^{\mathbf{F}}$ , de un campo  $\mathbf{F}$  sobre la superficie  $\sigma$  así:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_\sigma^{\mathbf{F}} &= \int_\sigma \delta \mathbf{R}_\sigma^{\mathbf{F}} dA = \int_\sigma \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dA \\ &= \int_a^b \int_c^d \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dv du \\ &= \int_a^b \int_c^d \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v dv du \\ &= \int_\sigma \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}\end{aligned}$$

La *expansión total*,  $\mathbf{E}_\Lambda^{\mathbf{F}}$ , de un campo  $\mathbf{F}$  en el sólido  $\Lambda$  es:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\Lambda^{\mathbf{F}} &= \int_\Lambda \delta \mathbf{E}_\Lambda^{\mathbf{F}} dV = \int_\Lambda \text{div } \mathbf{F} dV \\ &= \int_a^b \int_c^d \int_e^h \text{div } \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v, w)) |(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_w| dw dv du,\end{aligned}$$

y la *circulación*  $\mathbf{C}_\Gamma^{\mathbf{F}}$  de un campo  $\mathbf{F}$  a lo largo de la curva  $\Gamma$  es:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_\Gamma^{\mathbf{F}} &= \int_\Gamma \delta \mathbf{C}_\Gamma^{\mathbf{F}} dL = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} dL \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}\end{aligned}$$

Con esto, se puede ahora dar el enunciado de los teoremas fundamentales: el de la Divergencia y el de Stokes.

**Teorema de la divergencia** (Expansión). *Suponga que  $\mathbf{F} = \langle p, q, r \rangle$  es un campo vectorial con derivadas parciales continuas y que  $\sigma$  una superficie cerrada que encierra un sólido  $\Lambda$  contenidos en el dominio del campo y que  $\Lambda$  se puede parametrizar mediante una función vectorial diferenciable  $\mathbf{r} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Entonces,*

*la expansión de  $\mathbf{F}$  en  $\Lambda$*

*es igual a*

*el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de la frontera  $\sigma$  de  $\Lambda$ ,*

*es decir,*

$$\mathbf{E}_{\Lambda}^{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_{\sigma}^{\mathbf{F}}.$$

*Más precisamente se tiene que:*

$$\int_{\Lambda} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}.$$

*La orientación de  $\sigma$  la dá la parametrización de  $\Lambda$ .*

**Teorema de Stokes** (Rotación). *Suponga que  $\mathbf{F} = \langle p, q, r \rangle$  es un campo vectorial cuyas componentes escalares tienen derivadas parciales continuas y que  $\sigma$  es una superficie con borde  $\Gamma$  contenidos en el dominio del campo y que  $\sigma$  se puede parametrizar mediante una función vectorial diferenciable  $\mathbf{r} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Entonces,*

*la rotación de  $\mathbf{F}$  sobre  $\sigma$*

*es igual a*

*la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo del borde  $\Gamma$  de  $\sigma$ ,*

*es decir,*

$$\mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{F}} = \mathbf{C}_{\Gamma}^{\mathbf{F}}.$$

*Más precisamente se tiene que:*

$$\int_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$$

*La orientación de  $\Gamma$  la dá la parametrización de  $\sigma$ .*

**Nota:** En el caso en que  $\Gamma$  y  $\sigma$  estén contenidas en un plano y  $\mathbf{F}$  sea un campo bidimensional, el Teorema de Stokes se conoce también como el **Teorema de Green** y en ciertos contextos, el Teorema de la Divergencia se conoce como el **Teorema de Gauss**.

## EJERCICIOS

1. Use el Teorema del Rotación<sup>1</sup> para calcular las siguientes integrales. Se considera  $\Gamma$  orientada positivamente.

(a)  $\int_{\Gamma} (x^2 - y^2) dx + 2xy dy$  donde  $\Gamma$  es la frontera de

$$\sigma = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 2x \}.$$

(b)  $\int_{\Gamma} x^2 y dx + 2xy dy$  donde  $\Gamma$  es la frontera de

$$\sigma = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x \}.$$

(c)  $\int_{\Gamma} 2y dx - 3x dy$  donde  $\Gamma$  es la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ .

(d)  $\int_{\Gamma} (e^{x^2} + y^2) dx + (e^{y^2} + x^2) dy$  donde  $\Gamma$  es la frontera del triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(4, 0)$  y  $(0, 4)$ .

2. Muestre que para constantes  $a$ ,  $b$  y cualquier curva cerrada simple<sup>2</sup>  $\Gamma$ ,

$$\int_{\Gamma} a dx + b dy = 0,$$

es decir, la circulación de campos vectoriales constantes a lo largo de curvas cerradas simples es nula.

3. Use el Teorema del Rotacional para demostrar que si  $\Gamma$  es una curva plana, cerrada, simple, orientada positivamente y  $\sigma$  es la superficie del plano acotada por  $\Gamma$  entonces el área de  $\sigma$ ,  $A(\sigma)$ , está dada por

$$A(\sigma) = - \int_{\Gamma} y dx = \int_{\Gamma} x dy = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx.$$

4. Calcule  $\int_{\Gamma} e^x \sin y dx + (y^3 + e^x \cos y) dy$ , donde  $\Gamma$  es la frontera del rectángulo con vértices  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$  y  $(-1, -1)$ , orientada positivamente.

<sup>1</sup>El Teorema del Rotación es el mismo Teorema de Stokes y el mismo Teorema de Green en el caso de superficies planas

<sup>2</sup>Que no se cruza ella misma

5. Calcule el flujo del campo  $\mathbf{F}$  a través de la superficie  $\sigma$  en cada uno de los siguientes casos:

(a)  $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  y  $\sigma$  es la superficie del cubo sólido

$$\Lambda = \{ (x, y, z) : 0 \leq x, y, z \leq 1 \}.$$

(b)  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  y  $\sigma$  es la parte del plano  $6x + 3y + 2z = 6$  con  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , and  $z \geq 0$  con vector normal unitario con tercera componente positiva.

(c)  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$  y  $\sigma$  es la superficie de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $z \geq 0$ .

(d)  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\mathbf{i} + \mathbf{j} + yz\mathbf{k}$  y  $\sigma$  es la parte de la superficie cilíndrica  $x^2 + y^2 = a^2$  limitada por los planos  $z = 0$  y  $z = 3$ .

6. En cada numeral use el Teorema de la Divergencia para calcular el flujo del campo  $\mathbf{F}$  a través de las superficies  $\sigma$  dada:

(a)  $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$  y  $\sigma$  tiene ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ .

(b)  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$  y  $\sigma$  tiene ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

(c)  $\mathbf{F}(x, y, z) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$  y  $\sigma$  tiene ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

7. Muestre que el flujo de un campo vectorial constante a través de cualquier superficie cerrada es cero.

8. Encuentre un campo vectorial tal que su flujo a través de la superficie de una esfera de radio  $r$  dada sea el área de esa esfera.

9. El elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  se puede parametrizar usando las *coordenadas elipsoidales*

$$x = a \cos \phi \cos \theta, \quad y = b \sin \phi \cos \theta, \quad z = c \sin \phi$$

para  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y  $0 \leq \phi \leq \pi$ . Use esta parametrización para plantear una integral que permita calcular el área del elipsoide.

Nota: La integral que va a plantear no puede evaluarse por medios elementales. Para valores dados de las constantes se puede calcular por métodos numéricos.

10. Calcule  $\int_{\Gamma} f(x, y, z) dL$  para la función  $f$  y la curva  $\Gamma$  dadas.

- (a)  $f(x, y, z) = z$  donde  $\Gamma$  tiene ecuaciones paramétricas  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
- (b)  $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + y + 2yz$  donde  $\Gamma$  tiene ecuaciones paramétricas  $x = t^2$ ,  $y = t$ ,  $z = 1$ ,  $1 \leq t \leq 2$ .
- (c)  $f(x, y, z) = z^2$  donde  $\Gamma$  tiene ecuaciones paramétricas  $x = t \sin t$ ,  $y = t \cos t$ ,  $z = \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

11. En cada numeral calcule la circulación total del campo vectorial  $\mathbf{F}$  a lo largo de la curva  $\Gamma$  dada.

- (a)  $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$  y  $\Gamma$  tiene ecuaciones paramétricas

$$x = 3t, \quad y = 2t, \quad z = t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

- (b)  $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  y  $\Gamma$  tiene ecuaciones paramétricas

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- (c)  $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  y  $\Gamma$  tiene ecuaciones paramétricas

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 2, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- (d)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y - 2z)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + (2xz + y)\mathbf{k}$  y  $\Gamma$  tiene ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = 2t, \quad z = t^2 - 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

- (e)  $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$  y  $\Gamma$  es la curva poligonal desde  $(0, 0, 0)$  hasta  $(1, 2, 0)$  pasando por  $(1, 0, 0)$ .

- (f)  $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$  y  $\Gamma$  la curva poligonal desde  $(0, 0, 0)$  hasta  $(1, 2, -2)$  pasando por  $(1, 0, 0)$  y  $(1, 2, 0)$ .

12. Verifique el Teorema del Rotacional para el campo vectorial  $\mathbf{F}$  y la superficie  $\sigma$  dados.

- (a)  $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  y  $\sigma$  tiene ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \geq 0$ .

- (b)  $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$  y  $\sigma$  tiene ecuación  $z = x^2 + y^2$ ,  $z \leq 1$ .

13. Sea  $\sigma$  una superficie cerrada y  $\mathbf{F}$  un campo vectorial. Muestre que

$$\int_{\sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dA = 0.$$

14. Demuestre las siguientes identidades siendo  $r = \|\mathbf{r}\|$  la norma del campo vectorial  $\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ .
- $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$
  - $\nabla^2(1/r) = 0$  (vea el ejercicio 23 de la Lección 5)
  - $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$
  - $\nabla(\ln r) = \mathbf{r}/r^2$
15. Demuestre las siguientes propiedades de la divergencia y el rotacional
- $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{G}$
  - $\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{rot} \mathbf{G}$
  - $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$
  - $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}$
  - $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$
  - $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{rot} \mathbf{F} + (\nabla f) \times \mathbf{F}$
  - $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$
  - $\nabla^2(fg) = f \nabla^2 g + g \nabla^2 f + 2(\nabla f \cdot \nabla g)$
16. Cada coordenada cilíndrica de  $(x, y, z)$  en el espacio es una función de las tres variables  $x, y$  y  $z$ . Calcule  $\nabla r, \nabla \theta$  y  $\nabla z$ .
17. Sean  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$  y  $\mathbf{e}_z$  los campos vectoriales unitarios definidos por las curvas coordenadas en coordenadas cilíndricas<sup>3</sup>. Calcule el rotacional y la divergencia de estos campos vectoriales.
18. Calcule  $\operatorname{div} \mathbf{F}$  y  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$  si  $\mathbf{F}(r, \theta, z) = r\mathbf{e}_r + z \sin \theta \mathbf{e}_\theta + rz \mathbf{e}_z$  en coordenadas cilíndricas.
19. Cada coordenada esférica de  $(x, y, z)$  en el espacio es una función de las tres variables  $x, y$  y  $z$ . Calcule  $\nabla \rho, \nabla \theta$  y  $\nabla \phi$ .
20. Sean  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta$  y  $\mathbf{e}_\phi$  los campos vectoriales unitarios definidos por las curvas coordenadas en coordenadas esféricas. Calcule el rotacional y la divergencia de estos campos vectoriales.
21. Calcule  $\operatorname{div} \mathbf{F}$  y  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$  si  $\mathbf{F}(\rho, \theta, \phi) = \mathbf{e}_\rho + \rho \cos \theta \mathbf{e}_\theta + \rho \mathbf{e}_\phi$  en coordenadas esféricas.

---

<sup>3</sup>Se obtienen calculando los vectores tangente unitarios de las curvas coordenadas

22. Muestre que si un campo vectorial es conservativo, su rotacional en cada punto de su dominio es el vector nulo.
23. Muestre que si  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial tridimensional, con segundas derivadas parciales continuas entonces la divergencia del rotacional de  $\mathbf{F}$  es cero.
24. Para cada uno de los siguientes campos  $\mathbf{F}$  muestre que no existe ningún campo  $\mathbf{G}$  cuyo rotacional sea  $\mathbf{F}$ .

(a)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + y)\mathbf{i} + (y - 2z)^{3/2}\mathbf{j} + y^3\mathbf{k}$

(b)  $\mathbf{F}(x, y, z) = \cos(x - 2z)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(\frac{z}{x}\right)^{3/2}\mathbf{j} + y^3\mathbf{k}$

25. Si  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial tridimensional, con derivadas parciales continuas, determine la densidad rotacional del campo para:
- (a) Un punto arbitrario del plano  $XY$
- (b) Un punto arbitrario del plano  $XZ$
- (c) Un punto arbitrario del plano  $YZ$

26. Ponga  $\mathbf{F} = u \nabla v$  en el Teorema de la Divergencia para demostrar:

(a) *Primera identidad de Green*

$$\int_{\Lambda} (u \nabla^2 v + (\nabla u) \cdot (\nabla v)) dV = \int_{\sigma} (u \nabla v) \cdot d\mathbf{A}$$

(b) *Segunda identidad de Green*

$$\int_{\Lambda} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dV = \int_{\sigma} (u \nabla v - v \nabla u) \cdot d\mathbf{A}$$

27. Sea  $\mathbf{F}$  el campo definido en  $\mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 0\}$  por  $\mathbf{F} = \left\langle \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right\rangle$ . Demuestre que  $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$  pero que la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de cualquier circunferencia paralela al plano  $XY$ , con centro en el eje  $Z$  no es nula, y por consiguiente no puede existir una función  $f$  tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$ .
28. Sean  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $E = \mathbb{R}^3 - \{0\}$  y  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y, z) = \frac{1}{r}$ . Se sabe que  $f$  es armónica en  $E$ , es decir que  $\nabla^2 f = 0$  (vea los ejercicios 23 de la Lección 5 y el 14 (b) de esta Lección).

(a) Calcule

$$\int_{\sigma_R} \frac{df}{d\mathbf{N}} dA,$$

donde  $\sigma_R$  es la superficie de la esfera de radio  $R$  centrada en el origen.

(b) Demuestre que no puede existir un campo vectorial  $\mathbf{F}$  tal que  $\nabla f = \text{rot}\mathbf{F}$ .

(c) Calcule la circulación de  $\nabla f$  a lo largo de las curvas: (a)  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $z = a$ ,  $0 < a < R$  y (b)  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $y = \sqrt{3}x$

29. Sea  $\Lambda =$

$$\{(\rho \cos \theta, y, \rho \sin \theta) : a \leq \rho \leq b, z - 4a < y < 4a - z, -\pi/6 < \theta < \pi + \pi/6\}$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b < 4a$  y  $\mathbf{F}$  el campo vectorial tridimensional definido por  $\mathbf{F} = (2a - z)\mathbf{k}$ .

(a) Calcule el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $\partial\Lambda$ .

(b) Calcule el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $\sigma_1 = \partial\Lambda \cap \{(\rho, y, \theta) : y = -\rho \sin \theta + 4a\}$ .

(c) Calcule el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $\sigma_2 = \partial\Lambda \cap \{(\rho, y, \theta) : \rho = a\}$ .

(d) Calcule la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $\sigma_1 \cap \sigma_2$ .





# LECCIÓN 12

---

## Teoremas Fundamentales

---

Esta última lección está dedicada a la demostración de los teoremas fundamentales.

### El teorema del rotacional (Teorema de Stokes)

Supóngase que  $\mathbf{F} = \langle p, q, r \rangle$  es un campo vectorial definido en un conjunto cerrado y acotado  $D$  de  $\mathbb{R}^3$ , y que  $\sigma$  es una superficie con borde contenida en  $D$ , que se puede parametrizar mediante una función vectorial  $\mathbf{r} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con derivadas parciales  $\mathbf{r}_u$  y  $\mathbf{r}_v$  continuas y  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ .

Se considera una partición de  $\sigma$  en subregiones  $\sigma_{ij}$  obtenida a partir de una partición de la 2-celda  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$  en subceldas  $\mathcal{R}_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$ :

$$\sigma_{ij} = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : (u, v) \in [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]\}.$$

y se escoge en cada  $\sigma_{ij}$  un punto  $P_{ij}$ . La suma de Riemann

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(\delta\mathbf{R}_\sigma^{\mathbf{F}}, m, n) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \text{rot } \mathbf{F}(P_{ij}) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \Delta u \Delta v \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \delta\mathbf{R}_\sigma^{\mathbf{F}}(P_{ij}) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \Delta u \Delta v, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{r}_u$  y  $\mathbf{r}_v$  están evaluadas en  $P_{ij}$ , es una aproximación de la rotación total

de  $\mathbf{F}$  sobre  $\sigma$ , que no es otra cosa que la integral de  $\delta\mathbf{R}_\sigma^{\mathbf{F}}$  sobre  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} \int_\sigma \delta\mathbf{R}_\sigma^{\mathbf{F}} dA &= \int_a^b \int_c^d \delta\mathbf{R}_\sigma^{\mathbf{F}}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dvdu \\ &= \int_a^b \int_c^d \text{rot } \mathbf{F}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dvdu \end{aligned}$$

Note que la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $\partial\sigma_{ij}$  por unidad de área es  $\delta\mathbf{R}_\sigma^{\mathbf{F}}(P_{ij}) \approx \frac{\mathbf{C}_{ij}^{\mathbf{F}}}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \Delta u \Delta v}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \Re(\delta\mathbf{R}_\sigma^{\mathbf{F}}, m, n) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \delta\mathbf{R}_\sigma^{\mathbf{F}}(P_{ij}) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \Delta u \Delta v \\ &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{C}_{ij}^{\mathbf{F}}}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \Delta u \Delta v} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \Delta u \Delta v \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{C}_{ij}^{\mathbf{F}}. \end{aligned}$$

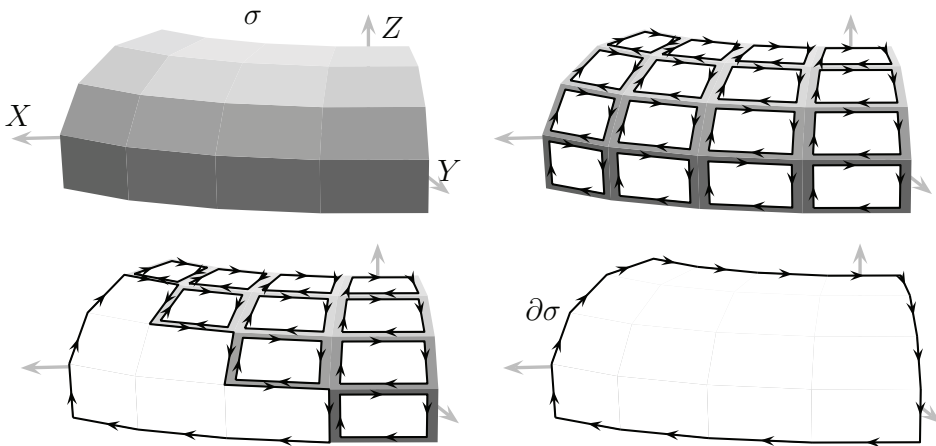


Figura 12.1: La secuencia de imágenes es una representación de la cancelación de circuciones  $\mathbf{C}_{ij}$  que aparecen en el cálculo de las sumas de Riemann, de la rotación total del campo sobre  $\sigma$ , que da lugar a la circulación total del campo a lo largo del borde de  $\sigma$ .

La circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $\partial\sigma_{ij}$  es igual a la suma de las circuciones  $\mathbf{C}_{ij}^1$ ,  $\mathbf{C}_{ij}^2$ ,  $\mathbf{C}_{ij}^3$  y  $\mathbf{C}_{ij}^4$  de  $\mathbf{F}$  a lo largo de cada una de las curvas correspondientes a los lados de  $\mathcal{R}_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$ . Como  $\mathbf{C}_{ij}^1 = -\mathbf{C}_{(i+1)j}^3$  y  $\mathbf{C}_{ij}^2 = -\mathbf{C}_{i(j+1)}^4$ ,

se tiene que

$$\begin{aligned}
 \Re(\delta\mathbf{R}_\sigma^{\mathbf{F}}, m, n) &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{C}_{ij}. \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\mathbf{C}_{ij}^1 + \mathbf{C}_{ij}^2 + \mathbf{C}_{ij}^3 + \mathbf{C}_{ij}^4) \\
 &= \sum_{i=1}^m (\mathbf{C}_{im}^2 + \mathbf{C}_{i0}^4) + \sum_{j=1}^n (\mathbf{C}_{nj}^1 + \mathbf{C}_{0j}^3) \\
 &= \sum_{i=1}^m \mathbf{C}_{im}^2 + \sum_{i=1}^m \mathbf{C}_{i0}^4 + \sum_{j=1}^n \mathbf{C}_{nj}^1 + \sum_{j=1}^n \mathbf{C}_{0j}^3
 \end{aligned}$$

donde  $\sum_{i=1}^m \mathbf{C}_{im}^1$ ,  $\sum_{i=1}^m \mathbf{C}_{i0}^2$ ,  $\sum_{j=1}^n \mathbf{C}_{nj}^3$  y  $\sum_{j=1}^n \mathbf{C}_{0j}^4$  son las sumas de Riemann de las circulaciones de  $\mathbf{F}$  a lo largo de cada uno de las curvas correspondientes a los lados de la 2-celda  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$  y que conforman el borde  $\partial\sigma$  de la superficie  $\sigma$ . Por consiguiente:

$$\begin{aligned}
 \int_{\sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \Re(\delta\mathbf{R}_\sigma^{\mathbf{F}}, m, n) \\
 &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^m \mathbf{C}_{im}^2 + \sum_{i=1}^m \mathbf{C}_{i0}^4 + \sum_{j=1}^n \mathbf{C}_{nj}^1 + \sum_{j=1}^n \mathbf{C}_{0j}^3 \right) \\
 &= \int_{\partial\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}
 \end{aligned}$$

### El teorema de expansión (Teorema de la divergencia)

Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial tridimensional definido en un conjunto abierto  $D$  del espacio. Sea  $\Lambda$  un sólido encerrado por una superficie cerrada  $\sigma$  contenidos en  $D$ . Suponga que  $\Lambda$  está parametrizado por una función vectorial

$$\mathbf{r} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(u, v, w) = \langle x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w) \rangle,$$

donde  $\mathcal{P} = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$  y  $\mathbf{r}$  tiene derivadas parciales continuas en  $(a, b) \times (c, d) \times (e, h)$ .

Considérese una partición de  $\Lambda$  en subregiones  $\Lambda_{ijk}$  definida por una partición de  $\mathcal{P}$  en subceldas  $\mathcal{P}_{ijk} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j] \times [w_{k-1}, w_k]$ . Es decir,

$$\Lambda_{ijk} = \{ (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) : (u, v, w) \in \mathcal{P}_{ijk} \}.$$

Escójase en cada  $\Lambda_{ijk}$  un punto  $P_{ijk}$ . La suma de Riemann

$$\Re(\text{div } \mathbf{F}, m, n, l) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l \text{div } \mathbf{F}(P_{ijk}) |(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_w| \Delta u \Delta v \Delta w,$$

es una aproximación de la integral de  $\operatorname{div} \mathbf{F}$  sobre  $\Lambda$  con respecto a  $\mathbf{r}$  ya que:

$$\begin{aligned} & \int_{\Lambda} \operatorname{div} \mathbf{F} dV \\ &= \lim_{m,n,l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l \operatorname{div} \mathbf{F}(P_{ijk}) |(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_w| \Delta u \Delta v \Delta w \\ &= \int_a^b \int_c^d \int_e^h \operatorname{div} \mathbf{F}(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_w| dw dv du. \end{aligned}$$

Se tiene que  $\delta \mathbf{E}_{\Lambda}^{\mathbf{F}}(P_{ijk}) = \operatorname{div} \mathbf{F}(P_{ijk}) \approx \frac{\mathbf{F}_{ijk}^{\mathbf{F}}}{|(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_w| \Delta u \Delta v \Delta w}$ , que es flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $\partial \lambda_{ijk}$  por unidad de volumen. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(\delta \mathbf{E}_{\Lambda}^{\mathbf{F}}, m, n, l) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l \delta \mathbf{E}_{\Lambda}^{\mathbf{F}}(P_{ijk}) |(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_w| \Delta u \Delta v \Delta w \\ &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l \frac{\mathbf{F}_{ijk}^{\mathbf{F}}}{|(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_w| \Delta u \Delta v \Delta w} |(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_w| \Delta u \Delta v \Delta w \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_{ijk}^{\mathbf{F}}. \end{aligned}$$

El flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $\partial \lambda_{ijk}$  es igual a la suma de los flujos  $\mathbf{F}_{ijk}^s$ ,  $s = 1, 2, \dots, 6$ , de  $\mathbf{F}$  a través de cada una de las superficies correspondientes a las caras de  $\mathcal{P}_{ijk} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j] \times [w_{k-1}, w_k]$ . Como  $\mathbf{F}_{ijk}^1 = -\mathbf{F}_{(i+1)jk}^6$ ,  $\mathbf{F}_{ijk}^2 = -\mathbf{F}_{i(j+1)k}^5$  y  $\mathbf{F}_{ijk}^3 = -\mathbf{F}_{ij(k+1)}^4$  se tiene que

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(\delta \mathbf{E}_{\Lambda}^{\mathbf{F}}, m, n, l) &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_{ijk}^{\mathbf{F}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l (\sum_{s=1}^6 \mathbf{F}_{ijk}^s) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\mathbf{F}_{ijl}^3 + \mathbf{F}_{ij0}^4) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l (\mathbf{F}_{ink}^2 + \mathbf{F}_{i0k}^5) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l (\mathbf{F}_{mjk}^1 + \mathbf{F}_{0jk}^6) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ijl}^3 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij0}^4 + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_{ink}^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_{i0k}^5 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_{mjk}^1 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_{0jk}^6 \end{aligned}$$

donde cada uno de los seis términos en la última suma es la suma de Riemann del flujo de  $\mathbf{F}$  a través de cada una de las superficies correspondientes a las

caras de la 3-celda  $\mathcal{P}$  y que conforman la superficie  $\partial\Lambda$  del sólido  $\Lambda$ . Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \operatorname{div} \mathbf{F} dV &= \lim_{m,n,l \rightarrow \infty} \Re(\delta \mathbf{E}_{\Lambda}^{\mathbf{F}}, m, n, l) \\ &= \lim_{m,n,l \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ijl}^3 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij0}^4 + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_{ink}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_{i0k}^5 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_{mjk}^1 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_{0jk}^6 \right) \\ &= \int_{\partial\Lambda} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \end{aligned}$$

Para terminar esta lección, considérese el Teorema de Stokes en el caso particular en el que la superficie  $\sigma$  esté contenida en el plano  $XY$ . Obsérvese que en este caso, el vector normal unitario en cada uno de los puntos de la superficie es el vector  $\mathbf{k}$ . Por consiguiente, la densidad de rotación del campo  $\mathbf{F} = \langle p, q, r \rangle$  es  $\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = q_x - p_y$ . Por consiguiente,

$$\int_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA = \int_{\sigma} (q_x - p_y) dA$$

y

$$\int_{\partial\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = \int_{\partial\sigma} p dx + q dy.$$

Es decir, el teorema, que se conoce como el Teorema de Green, toma la siguiente forma:

**Teorema de Green:** Suponga que  $\mathbf{F} = \langle p, q \rangle$  es un campo vectorial definido en un subconjunto abierto y acotado  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  y que  $\sigma$  es una superficie plana contenida en  $D$  que se puede parametrizar mediante una función vectorial diferenciable  $\mathbf{r} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Si las componentes escalares de  $\mathbf{F}$  tienen derivadas parciales continuas, entonces, la rotación total del campo sobre  $\sigma$  es igual a la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo del borde  $\partial\sigma$  de  $\sigma$ . Esto es,

$$\int_{\sigma} (q_x - p_y) dA = \int_{\partial\sigma} p dx + q dy.$$

## EJERCICIOS

- Use el teorema de la divergencia para mostrar que si un campo es conservativo en todo el espacio, el flujo del campo a través de cualquier superficie cerrada orientable es cero.
- Muestre que si un campo es conservativo en el espacio, excepto en un punto, el flujo del campo a través de cualquier par de superficies cerradas que contengan al punto en su interior es igual.
- Para cada uno de los siguientes campos vectoriales determine, si existe, una función potencial.

(a)  $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 3x^2) \mathbf{i} + 2xy \mathbf{j}$ .

(b)  $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 \cos(xy) + 2x \sin(xy)) \mathbf{i} + x^2 y \cos(xy) \mathbf{j}$ .

(c)  $\mathbf{F}(x, y) = (8xy + 3) \mathbf{i} + 4(x^2 + y) \mathbf{j}$ .

- Verifique usando integración que el área de la superficie de una esfera de radio  $r$  es  $4\pi r^2$ .
- Verifique usando integración que el área lateral de un cono circular recto de radio  $r$  y altura  $h$  es  $\pi r \sqrt{h^2 + r^2}$ .
- Si la superficie  $\sigma$  tiene ecuación  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , muestre que el área de  $\sigma$  está dada por

$$A(\sigma) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dA.$$

- La *derivada normal* de una función  $u$  sobre una superficie cerrada es la derivada direccional  $\frac{du}{d\mathbf{N}}$  de  $u$  en la dirección del vector normal unitario exterior  $\mathbf{N}$  de la superficie. Muestre que si  $\sigma$  es una superficie cerrada y  $u$  es una función con derivadas parciales continuas que es armónica (vea el ejercicio 23 de la Lección 5) en  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $\int_{\sigma} \frac{du}{d\mathbf{N}} dA = 0$ .

---

## Apéndice: Teorema del cambio de variable

---

En este apéndice se presenta la contribución del profesor Richar Riaño de un bosquejo de la demostración del Teorema del Cambio de Variable. El lector interesado puede llenar fácilmente los detalles faltantes.

Sean  $U$  y  $V$  dos conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^2$  y  $T : U \rightarrow V$ ,  $T = (f, g)$ , una función tal que  $f$  y  $g$  tengan derivadas parciales continuas. El determinante jacobiano de  $T$ ,  $J(T)$ , está definido por

$$J(T) = \left| \det \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \right|.$$

En el caso en que  $U$  y  $V$  sean abiertos de  $\mathbb{R}^3$  y  $T = (f, g, h)$ , el determinante jacobiano de  $T$  está definido por

$$J(T) = \left| \det \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{pmatrix} \right|.$$

Sean  $\sigma$  y  $\tau$  superficies de  $\mathbb{R}^2$ , y supóngase que  $\tau$  está parametrizada por

$$\mathbf{r} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}(u, v) = \langle x(u, v), y(u, v) \rangle,$$

donde  $x$  y  $y$  tienen derivadas parciales continuas en el abierto  $(a, b) \times (c, d)$  y son continuas en  $\mathcal{R}$ . Sea

$$T : \tau \rightarrow \sigma, \quad T(x, y) = (f(x, y), g(x, y)),$$

una función uno a uno y sobre, donde  $f$  y  $g$  son funciones reales con derivadas parciales continuas en el interior de  $\tau$  y  $J(T)(x, y) \neq 0$  para todo  $(x, y)$  en el interior de  $\tau$ . Si  $\mathbf{t} = T \circ \mathbf{r} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\mathbf{t}(u, v) = \langle f(x(u, v), y(u, v)), g(x(u, v), y(u, v)) \rangle,$$



usando la Regla de la Cadena, se puede demostrar que

$$\|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\| = (J(T) \circ \mathbf{r}) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|.$$

Se tiene entonces que  $\mathbf{t}$  es una parametrización de  $\sigma$ .

Por consiguiente, si  $F$  es un campo escalar continuo definido en  $\sigma$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} F dA &= \int_a^b \int_c^d (F \circ \mathbf{t}) \|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\| dudv \\ &= \int_a^b \int_c^d ((F \circ T) \circ \mathbf{r}) (J(T) \circ \mathbf{r}) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dudv \\ &= \iint_{\tau} (F \circ T) J(T) dA \end{aligned}$$

Se ha demostrado así el Teorema del Cambio de Variable en  $\mathbb{R}^2$ :

$$\iint_{\sigma} F dA = \iint_{\tau} (F \circ T) J(T) dA$$

bajo las hipótesis establecidas sobre  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $T$  y  $F$ .

En el caso en que  $\Lambda$  y  $\Sigma$  son sólidos en  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{r}$  es una parametrización de  $\Sigma$ ,  $T: \Sigma \rightarrow \Lambda$  es tal que  $J(T) \neq 0$  en el interior de  $\Sigma$ , se puede demostrar, usando la Regla de la Cadena que si  $\mathbf{t} = T \circ \mathbf{r}$ , se tiene que

$$|\mathbf{t}_u \cdot (\mathbf{t}_v \times \mathbf{t}_w)| = (J(T) \circ \mathbf{r}) |\mathbf{r}_u \cdot (\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w)|.$$

Por lo tanto,

$$\iiint_{\Lambda} F dV = \iiint_{\Sigma} (F \circ T) J(T) dV,$$

para cualquier campo escalar  $F$  definido en  $\Lambda$ . Lo que demuestra el Teorema del Cambio de Variable en  $\mathbb{R}^3$ .

---

## Bibliography

---

- [1] Tromba A. and Marsden J., *Cálculo vectorial*, 5a ed., Addison-Wesley Pub. Co, 2004.
- [2] Thomas G. B., *Calculus and analytic geometry*, 3rd ed., Addison-Wesley Pub. Co, 1960.
- [3] ———, *Cálculo varias variables*, 12a ed., Addison Wesley, 2010.
- [4] Lang S., *Calculus of several variables*, 3rd ed., Springer (Undergraduate Texts in Mathematics), 1996.



---

## Índice alfabético

---

- Aceleración
  - de un objeto, 50
  - normal, 50
  - tangencial, 50
- Acercamiento, 67
- Adición
  - de vectores, 4
- Área
  - del paralelogramo, 7
  - de una superficie, 136
- Borde
  - de un sólido, 161
  - de una superficie, 160
- Cambio
  - absoluto, 93
  - porcentual, 93
  - relativo, 93
- Campo vectorial
  - bidimensional, 149
  - representación de, 150
  - tridimensional, 149
- Campo
  - conservativo, 157
  - gradiente, 156
- Celda
  - 1-..., 37
  - 2-..., 37
  - 3-..., 37
- Centro de masa
  - de un alambre, 140
  - de un sólido, 139
  - de una lámina, 138
- Circulación
  - a lo largo de una curva, 152
- Circunferencia osculadora, 48
- Clasificación
  - de puntos críticos, 110
- Componente
  - en una dirección, 6
  - escalar, 3
- Conjunto
  - abierto, 64
  - acotado, 64
  - cerrado, 64
- Continuidad
  - de funciones polinómicas, 70
  - de funciones racionales, 70
- Coordenadas
  - cilíndricas, 25
  - esféricas, 26
  - rectangulares, 1
- Curvas
  - de nivel, 65
- Curvatura

- de una curva, 46
- gaussiana, 49, 59
- media, 49, 59
- Curva
  - coordenada, 32
  - regular, 44
- Densidad
  - de circulación, 151
  - de expansión, 156, 168
  - de flujo, 151, 167
  - rotacional, 155, 171, 172
- Derivadas
  - cruzadas, 87
  - de orden superior, 87
  - parciales, 81
- Derivada
  - direccional, 80
  - normal, 188
- Desigualdad
  - del valor medio, 146
- Determinante Jacobiano, 189
- Diferenciación
  - implícita, 101
- Diferencial
  - de una función, 86
- Directriz, 20
- Distancia
  - entre dos puntos, 4
- Divergencia
  - de un campo, 168
- Dominio
  - de una función, 64
- Ecuación
  - vectorial de la recta, 8
  - cilíndrica, 26
  - de la superficie de la esfera, 20
  - de Laplace, 94
  - del plano, 19
- Ecuaciones
  - paramétricas, 39
  - paramétricas de la recta, 8
  - simétricas de la recta, 8
- Eje
  - esférico, 26
- Elipsoide, 21
- Error
  - bien pequeño, 84
  - de aproximación, 84
- Expansión
  - total de un campo, 174
- Exterior
  - de un conjunto, 63, 64
- Flujo
  - a través de una curva, 152
  - a través de una superficie, 168
- Frontera
  - de un conjunto, 63, 64
- Función vectorial, 38
  - bidimensional, 41
  - de una variable, 38
  - tridimensional, 41, 43
  - continua, 38
  - diferenciable, 38
- Función
  - afín, 84
  - armónica, 94
  - continua, 69
  - derivada direccional, 80
  - diferenciable, 84
  - escalar, 63
  - potencial, 157
- Gráfica
  - de una función, 64
- Hiperboloide
  - de dos hojas, 21
  - de una hoja, 21
- Identidad de Green
  - primera, 180
  - segunda, 180
- Imagen

- de una función, 64
- Integral
  - iterada, 125
  - sobre un sólido, 129
  - sobre una 1-celda, 122
  - sobre una 2-celda, 123
  - sobre una 3-celda, 125
  - sobre una curva, 132
  - sobre una superficie, 127
  - sobre una superficie plana, 128
- Interior
  - de un conjunto, 63
- Límite
  - de una función, 67
- Laplaciano
  - de una función, 95
- Linealmente
  - dependientes, 14
- Longitud
  - de un segmento, 4
  - de una curva, 45
- Lugar geométrico, 8
- Mapa de contorno, 65
- Multiplicación
  - por escalar, 5
- Multiplicadores
  - de Lagrange, 113
- Paraboloide
  - elíptico, 23
  - hiperbólico, 23
- Parametrización
  - de una curva, 39
  - de una superficie, 41
  - por longitud de arco, 45
- Partición
  - de una superficie, 126
  - uniforme, 121
- Paso
  - por un punto, 79
- Plano osculador, 47
- Plano tangente
  - a la gráfica, 83
- Plano
  - tangente a una superficie, 100
- Producto
  - escalar, 4
  - vectorial, 4
- Punto
  - crítico, 110
  - exterior, 64
  - frontera, 64
  - interior, 63
- Razón
  - de cambio, 79
  - de máximo crecimiento, 99
  - de máximo decrecimiento, 99
- Recta, 8
- Región
  - plana de tipo I, 141
  - plana de tipo II, 142
  - sólida de tipo I, 143
  - sólida de tipo II, 143
  - sólida de tipo III, 143
- Regla
  - de la cadena, 97, 98
  - de la mano derecha, 10
- Rotación
  - total de un campo, 174
- Rotacional
  - de un campo, 172
- Sólido, 43
- Señala, 39
- Segmentos
  - de recta dirigidos, 3
- Semiplano
  - esférico, 26
- Suma
  - de Riemann, 121, 123, 124, 126, 129, 131
- Superficie, 41

- cerrada, 159
- cilíndrica, 20
- con borde, 159
- de un sólido, 161
- cónica, 21
- coordenada, 32
- cuadrática, 21
- de nivel, 65
- doblemente reglada, 30
- orientable, 167
- regular, 49
- Teorema
  - de Clairaut, 135
  - de expansión, 175
  - de Fubini, 125
  - de Gauss, 175
  - de Green, 175
  - de la divergencia, 175
  - de la rotación, 175
  - de Stokes, 175
  - del Cambio de Variable, 190
  - del valor medio para integrales dobles, 146
  - Fundamental del Cálculo, 122
- Trabajo
  - realizado por un campo, 158
- Trazas, 24
  - horizontales, 24
  - verticales, 24
- Valores
  - extremos absolutos, 112
- Valor
  - extremo, 110
  - máximo absoluto, 109
  - máximo local, 109
  - mínimo absoluto, 109
  - mínimo local, 109
- Vecindad
  - de un punto, 63
- Vector
  - ...es ortogonales, 6
  - ...es canónicos, 5
  - proyección, 6
  - binormal, 47
  - geométrico, 3
  - gradiente, 98
  - magnitud de un, 4
  - norma de un, 4
  - normal unitario, 47
  - tangente unitario, 44
  - unitario, 5
- Velocidad
  - de un objeto, 50
- Volumen
  - de un sólido, 135
  - del paralelepípedo, 7



ISBN: 978-958-9205-99-0

